Conf 03 : Grandeurs et géométrie

Matthieu Gaud,

Groupe Collège, IREM de Poitiers ; matthieugaud@gmail.com

Résumé : En nous appuyant sur des éléments d'histoire des mathématiques, nous montrerons le rôle que jouent les grandeurs angles, longueurs, aires *et* volumes *dans la construction de la géométrie élémentaire, mais aussi dans l'extension de la notion de nombre. Nous verrons que ce sont des questions liées à ces grandeurs qui ont favorisé cette construction et cette extension. D'autre part, la recherche de l'usage des connaissances de mathématiques élémentaires dans la vie actuelle et passée des hommes nous a fait prendre conscience qu'elles vivaient essentiellement à travers la manipulation de grandeurs. Nous proposons donc, un peu à l'instar de Clairaut avec ses Elémens de géométrie de 1741, un apprentissage de la géométrie à partir de l'étude des 4 grandeurs géométriques et de 4 types de tâches associés à chaque grandeur. C'est une démarche que nous expérimentons et pratiquons depuis une dizaine d'années au collège. Nous en donnerons une déclinaison au cycle 3 en en montrant les avantages.*

Mots clefs : Grandeurs ; Géométrie ; Euclide ; Clairaut ; cycle 3

Préliminaire

Si l'on regarde le type d'exercices techniques, comme multiplier un nombre par une fraction, qui figurent en abondance dans les manuels de cycle 3, et le temps qui y est consacré dans les apprentissages, on est loin des attendus de fin cycle du programme, et à la merci de la question usuelle des élèves : « *À quoi ça sert, m'sieur* ? … » Face à cette question, professeurs comme institution sont globalement désarmés. Voici quelques réponses des uns comme de l'autre :

- *C'est au programme. Et puis tu en auras besoin en cycle 4.*
- *Sans ça tu n'aurais pas de pacemakers, de portables, de fusée Ariane…*
- *Par pitié cher élève, ne me pose pas cette question…*
- « *Les mathématiques ne sont pas, de manière évidente, utiles au citoyen ; cela devra être démontré.* » (*Rapport Thélot*, 2004)
- « *Les exercices proposés dans les classes contribuent à l'image négative d'une discipline ressentie comme uniquement scolaire et éloignée de la vie.* » (*Rapport de l'I.G.E.N.*, 2007)

Notre proposition d'un enseignement à partir des grandeurs a pour ambition de relever les défis ci-dessus : ne pas couper notre enseignement de la société et de la culture selon les vœux d'Yves Chevallard (voir par exemple Chevallard, 2007). Pour cela nous sommes revenus aux sources du savoir en revisitant son histoire, et nous avons cherché où vivent les mathématiques élémentaires dans notre société. Il nous est apparu que c'est à travers l'étude des grandeurs que les notions élémentaires des mathématiques se sont construites, et que c'est à travers elles qu'elles vivent dans notre environnement. Voyons cela pour la géométrie.

La place des grandeurs dans la géométrie

> « La géométrie est une science qui a pour objet la mesure de l'étendue. L'étendue a trois dimensions, longueur, largeur, hauteur ». (Legendre, 1817)
>
> *Mais l'étude des aires et des volumes a une utilité plus haute qu'il faut envisager : elle fait comprendre comment, pour des fins pratiques, les hommes ont pu être conduits à construire la géométrie et elle justifie leur effort.* (Lebesgue, 1935)

On ne peut pas faire de géométrie sans parler de grandeurs

Dès le départ, la géométrie pour définir ses objets, a besoin des notions de longueur, d'angle, d'aire, et de volume, même en maternelle, pour pouvoir parler du carré ou du cube. C'est ce que montre la lecture du début des *Élément*s d'Euclide, à commencer par les définitions (Euclide, 1990-2001).

La longueur, est utilisée dès le départ comme une notion connue (*Une **ligne** est une longueur sans largeur,* déf. I 2), l'aire est définie implicitement dans la définition de la surface (*Une **surface** est ce qui a seulement longueur et largeur,* déf. I 5), de même que le volume (*Est **solide** ce qui a longueur et largeur et profondeur,* déf. XI 1). Par contre l'angle est explicitement défini (*Un **angle plan** est l'inclinaison, l'une sur l'autre, dans un plan, de deux lignes qui se touchent l'une l'autre et ne sont pas placées en ligne droite,* déf. I 8). Puis ces grandeurs sont utilisées pour définir les figures, le cercle (*Un **cercle** est une figure plan, contenue par une ligne unique par rapport à laquelle toutes les droites menées à sa rencontre à partir d'un unique point parmi ceux qui sont placés à l'intérieur de la figure, sont égales entre elles,* déf. I 15), les différents types de triangles et de quadrilatères (déf. I 19 à 22), ou des relations entre objets. Une droite est dite perpendiculaire à une autre si elle forme avec celle-ci deux angles adjacents égaux (déf. I 10). Si Euclide définit les parallèles comme des droites qui ne se coupent pas (*Des droites **parallèles** sont celles qui étant dans le même plan et indéfiniment prolongées de part et d'autre, ne se rencontrent pas, ni d'un côté ni de l'autre,* déf. I 23), d'autres auteurs d'éléments de géométrie, comme Clairaut, les définissent comme des droites équidistantes, adoptant un point de vue plus proche de la pratique, en lien avec leur construction. On retrouve les angles dans l'énoncé du cinquième postulat d'Euclide (*Et que, si une droite tombant sur deux droites fait les angles intérieurs et du même côté plus petits que deux droits, les deux droites, indéfiniment prolongées, se rencontrent du côté où les angles sont plus petits que deux droits,* demande 5).

Quant aux neuf notions communes (ou axiomes), elles fixent les règles de la manipulation des nombres et des grandeurs sans les spécifier :

- *Les choses égales à une même chose sont aussi égales entre elles.*
- *Et si, à des choses égales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont égaux.*
- *Et si, à partir de choses égales, des choses égales sont retranchées, les restes sont égaux.*
- *Et si, à des choses inégales, des choses égales sont ajoutées, les touts sont inégaux.*
- *Et les doubles du même sont égaux entre eux.*
- *Et les moitiés du même sont égales entre elles.*
- *Et les choses qui s'ajustent les unes sur les autres sont égales entre elles.*
- *Et le tout est plus grand que la partie.*
- *Et deux droites ne contiennent pas une aire.*

Ensuite toutes les propositions du corpus euclidien (théorèmes ou problèmes de construction) utilisent les grandeurs dans leurs formulations ou leurs démonstrations.

On ne peut pas parler de grandeurs sans faire de géométrie

Les grandeurs sont inextricablement liées aux figures géométriques. Au point que certains termes de la géométrie désignent tout à la fois l'objet et sa grandeur. Ainsi en est-il des mots côtés, hauteur, base, angle. Mais aussi, chez Euclide, du nom de la figure qui désigne également son aire quand il parle d'égalité de figures (voir prop. I 36). Est-ce gênant comme l'a pensé la réforme des mathématiques modernes ? En ce qui concerne les angles on pourra lire l'article cité en bibliographie (Guichard, 2015). Ce qui est sûr c'est que pour comparer des angles, on sera amené à parler de demi-droites, de superposition et des moyens de la réaliser (qu'il s'agisse de construire un gabarit, une fausse équerre, ou de faire une construction à la règle et au compas), d'intérieur et d'extérieur … mais aussi de symétries, de figures ayant des angles égaux (avec des résultats à établir, d'où une familiarisation avec le raisonnement) … On est donc d'emblée dans une construction et une appropriation des concepts, outils et méthodes de la géométrie. On pourrait multiplier les exemples.

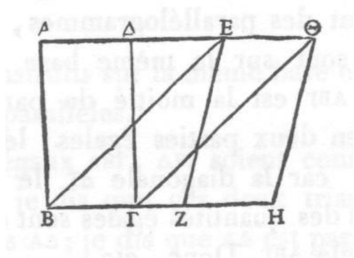


Figure 1 : Proposition I 36

Les parallélogrammes qui sont sur des bases égales et dans les mêmes parallèles sont égaux entre eux

Les problèmes concernant les grandeurs irriguent la géométrie

Citons-en un certain nombre.

Le problème de la comparaison et du calcul des aires planes et des volumes est au cœur des travaux des mathématiciens grecs de l'Antiquité sous différentes formes :

- Euclide dans le livre I de ses *Éléments* s'intéresse aux aires des figures polygonales avec pour point final de son étude la proposition 45 : on peut construire un parallélogramme d'angle donné dont l'aire est égale à celle d'une figure polygonale donnée ; et dans son livre XI, à l'aire du cercle, et au volume de la pyramide, du cône et de la sphère.

- Héron d'Alexandrie consacre ses *Métriques* à établir des algorithmes pour le calcul des aires et des volumes de figures.

- Archimède dans ses ouvrages célèbres *La mesure du cercle*, *La sphère et le cylindre*, *La quadrature de la parabole*, établit des formules qui sont restées célèbres.

Le problème de la quadrature des figures planes (*Construire un carré d'aire égale à celle d'une ou plusieurs figures données*) a traversé les siècles et les civilisations (Guichard, 2014). Les exemples les plus fameux en sont la quadrature du cercle, et celle de plusieurs carrés (dont un cas particulier est le « théorème de Pythagore »). Problème qui est toujours vivant car il dépend des conditions que l'on s'impose : construction à la règle et au compas, à l'aide de puzzles, de puzzles articulés, exacte ou approchée … L'équivalent dans l'espace, nous a légué aussi un problème célèbre : celui de la duplication du cube.

Le problème du partage des angles, fondamental pour la construction d'instruments de mesure, a lui aussi bien occupé les géomètres. En particulier la trisection de l'angle, célèbre problème qui a parcouru les mathématiques, est un de ces problèmes qui font les mathématiques comme le dit le titre d'un ouvrage de Jean Aymès (Aymès, 1988).

Le problème de l'incommensurabilité de la diagonale et du côté d'un carré (ou d'un pentagone régulier), est lié à la mesure des longueurs. Sa découverte, attribuée à Pythagore ou à son école, a amené les Grecs à élaborer une théorie des rapports de grandeurs (que l'on retrouve dans le livre V des *Éléments* d'Euclide) et l'étude des grandeurs irrationnelles (auxquelles est consacré son livre X). Contenus mathématiques qui ont traversé les siècles et dont on retrouve des traces dans le calcul sur les proportions et sur les racines carrées.

Le problème de la mesure de la circonférence du cercle, dont Archimède ne peut donner qu'un encadrement dans sa *Mesure du cercle* : « *La circonférence d'un cercle quelconque est égale au triple du diamètre réuni à une certaine portion de son diamètre, qui est plus petite que le septième de son diamètre, et plus grande que les 10/71 de ce même diamètre* » (Archimède, 1807). Ce qui a donné 22/7 comme classique approximation du nombre π, bien des siècles plus tard.

Voici ce qu'en dit Héron d'Alexandrie dans ses *Métriques* (Héron, 2014) : « *D'autre part, le même Archimède démontre dans l'[écrit] sur les plinthides et les cylindres que le périmètre de tout cercle, relativement au diamètre, a un rapport, d'une part plus grand que celui qu'a 21 1875 relativement à 6 7441, d'autre part plus petit que celui qu'a 19 7888 relativement à 6 2351*[1]. *Mais puisque ces nombres ne s'appliquent pas bien aux mensurations, ils sont ramenés à des nombres minimaux, comme le 22 relativement aux 7 ; de sorte que, si le diamètre du cercle est donné, disons au hasard de 14 unités, et qu'on veuille trouver le périmètre, il faut faire les 14 par les 22 et, de ceux-ci, prendre le septième et déclarer qu'autant que cela est le périmètre ; et il est de 44 unités.* »

La nature du nombre exprimant le rapport de la circonférence du cercle à son diamètre ne sera élucidée qu'au 19^e^ siècle. C'est le problème de la mesure des longueurs, dans le cadre de la géométrie, qui a conduit aux différentes extensions de la notion de nombre, comme l'esquissent les exemples précédents.

D'autres problèmes encore, on pourrait citer aussi les problèmes concernant l'agrandissement et la réduction des figures, la mesure des grandeurs inaccessibles, le repérage, le calcul de la longueur des courbes, le problème des isopérimètres, des surfaces et volumes minimaux …

Donc l'étude des angles, longueurs, aires et volumes est au cœur de la construction du corpus géométrique, et de celle de la construction du nombre. On peut en prendre la mesure en consultant les sommaires de grands traités de géométrie.

Voici celui des *Leçons de géométrie élémentaires* de Hadamard, qui a été une référence de la première moitié du 20e siècle (Hadamard, 1922).

Livre premier : De la ligne droite (Chap. 1 Des angles, …)
Livre II : Du cercle (… Chap. 2 Diamètres et cordes, …, Chap. 4 Propriété de l'angle inscrit, …)
Livre III : De la similitude
Livre IV : Des aires

Et celui des *Éléments de géométrie de Legendre*, qui a été une référence tout au long du 19e siècle (Legendre, 1817).

Livre I Généralités (Principes, angles, perpendiculaires, parallèles, triangles, quadrilatères)
Livre II Le cercle et la mesure des angles

[1] Ce qui montre l'intérêt des comparaisons de fractions, des encadrements de fractions par des fractions plus simples et des calculs de différences de fractions pour évaluer les écarts de précision.

Livre III Les proportions des figures (aires, proportionnalité, similitude)
Livre IV Les polygones réguliers et la mesure du cercle
Livre V Les plans et les angles solides
Livre VI La sphère
Livre VII Les trois corps ronds
Notes
Traité de trigonométrie

Des grandeurs sans mesure à la mesure des grandeurs

Dans Euclide les grandeurs sont omniprésentes, mais sans aucune mesure. On peut remarquer néanmoins qu'à ce stade interviennent nombres entiers et fractions, ainsi que rapports et proportions dans les problèmes de comparaison et de partage des grandeurs. Le problème de leur mesure est résolu de façon théorique au livre X qui commence par cette définition *: Sont dites grandeurs commensurables celles qui sont mesurées par la même mesure, et incommensurables, celles dont aucune commune mesure ne peut être produite*. C'est alors l'algorithme bien connu des soustractions successives (que nous appelons l'algorithme d'Euclide) qui va trancher (prop. 2 et 3). Par contre le problème de l'utilisation pratique d'une mesure (choix d'une unité, changement d'unité, nombres pour exprimer les mesures, calculs avec ces nombres) relève dans l'Antiquité d'un autre type d'ouvrage : traités d'arpentage, de calcul des aires et des volumes, d'astronomie...

Prenons un exemple dans les *Métriques* d'Héron d'Alexandrie (1[er] siècle), qui utilise le livre I des *Éléments* d'Euclide pour établir et justifier les algorithmes pour le calcul des aires des différentes figures polygonales. Ces algorithmes sont mis en œuvre sur des mesures de longueurs données.

Voici par exemple (Héron, 2014, et IREM de Poitiers, 2017, p 18) le calcul de l'aire d'un triangle équilatéral de 10 unités de côté :

> *Les 10 par eux-mêmes : il en résulte 100 ; ceux-ci par eux-mêmes : il en résulte 10000 ; de ceux-ci, prends les 3/16 : il en résulte 1875 ; de ceux-ci, prends un côté ; et puisqu'ils n'ont pas un côté exprimable, qu'il soit pris de manière approchée avec une différence, comme nous l'avons appris ; et l'aire sera 43⅓.*

ou dans Columelle, un auteur latin de la même époque, dans un contexte plus pratique avec la gestion des unités :

> *Soit un champ triangulaire offrant sur chaque côté trois cents pieds ; multipliez ce nombre par lui-même, prenez le tiers de quatre-vingt-dix mille, produit de cette multiplication, c'est-à-dire trente mille, puis le dixième qui est de neuf mille ; réunissez ces deux sommes, vous trouverez trente neuf mille, nombre de pieds carrés que contient ce triangle, et qui équivalent à un jugère un trient et un sicilique.*

Remarquons au passage comment l'algorithmique, nouvellement incluse dans les programmes, s'insère naturellement dans le calcul sur la mesure des grandeurs. On pourra trouver de nombreux exemples dans la brochure *Algorithmique et programmation au cycle 4 à partir des grandeurs* (IREM de Poitiers, 2017). Plus près de nous, après les efforts des mathématiciens du 19[e] siècle pour construire les nombres réels à partir des entiers en se débarrassant des grandeurs continues[2]. Lebesgue propose de les définir à partir de la mesure des longueurs et du système décimal. Voici le

[2] C'est le point de vue adopté par la réforme des mathématiques modernes à partir des années 1970, et dont on a pu mesurer les dégâts sur les apprentissages premiers : voir par exemple (Chambris, 2007).

plan de son ouvrage *La mesure des grandeurs* avec les résumés qu'il en fait au paragraphe 54 (Lebesgue, 1975, page 79).

> ***Chapitre I : Comparaison des collections ; Nombres entiers***
> *Les nombres entiers ne sont que des symboles matériels inventés pour servir de comptes rendus aux expériences physiques de dénombrement.*
> ***Chapitre II : Longueurs ; Nombres***
> *Les nombres quelconques ne sont eux aussi que des symboles destinés à servir de comptes rendus à des expériences physiques; schématisées géométriquement certes, mais de telle manière que l'on peut presque dire que l'opération n'a pas été schématisée, que ce sont seulement les objets sur lesquels elle porte qui l'ont été. Au lieu de placer un mètre en bois sur le mur à mesurer, nous avons porté un segment unité sur un segment à mesurer.*
> ***Chapitres III et IV : Aires et volumes***
> *Les aires et les volumes ne sont que les mêmes nombres, les mêmes symboles, mais utilisés comme comptes rendus d'autres opérations, les opérations de quadrature et de cubature.*

Et quelques pages plus loin (paragraphe 55, page 82), il résume l'esprit de sa démarche :

> *Pour être prêts à traduire des mesures physiques de plus en plus précises, le procédé auquel les hommes sont arrivés, celui qui emploie des nombres à une infinité de chiffres, paraît à la fois le plus naturel et le plus simple. Mais ceci a pour conséquence que ce qui nous intéresse dans une mesure géométrique, notre but, ce ne sont pas les nombres obtenus au premier ou au second stade de la mesure, c'est le nombre auquel nous ne parviendrons que par une opération de l'esprit.*

Ces nombres élaborés à partir de la mesure des grandeurs vont permettre d'aller toujours plus loin dans le calcul sur les grandeurs, et dans leur numérisation, comme nous le rappelle aujourd'hui le monde numérique dans lequel nous vivons, et qui en montre la puissance. C'est bien le problème de la mesure des grandeurs qui amène à concevoir des nombres nouveaux capables de rendre compte de la mesure du continu de façon simple et naturelle.

On peut partir des problèmes sur les grandeurs pour découvrir toute la géométrie

Une géométrie naturelle, qui ne rebute pas les débutants, tel est le projet de Clairaut lorsqu'il rédige ses Elémens de géométrie en 1741 (Clairaut, 1741). Son idée : construire toute la géométrie plane à partir du problème de la mesure des terrains, et la géométrie dans l'espace à partir de la mesure des solides. À partir de ces deux problématiques, Clairaut en rencontre d'autres que nous avons signalées précédemment, comme la mesure des grandeurs inaccessibles, ou la quadrature des figures.

Voici le plan de son ouvrage :

PREMIERE PARTIE (pages 1 à 72)
Des moyens qu'il était le plus naturel d'employer pour parvenir à la mesure des Terrains.
DEUXIEME PARTIE (pages 73 à 102)
De la méthode géométrique de comparer des figures rectilignes.
TROISIEME PARTIE (pages 103 à 144)
De la mesure des figures circulaires et de leurs propriétés.
QUATRIEME PARTIE (pages 145 à 215)
De la manière de mesurer les solides et leurs surfaces.

Pari gagné, car son ouvrage a connu un grand nombre de réimpressions, rééditions et traductions dans de nombreuses langues s'étendant sur plus d'un siècle. Ce sera l'ouvrage recommandé par les programmes de 1852. Pour les plus petites classes (11 – 13 ans), les instructions indiquent : « *Le livre de Clairaut, qui devra être suivi, à peu d'exceptions près, pour tout ce qui concerne la géométrie, est d'ailleurs le commentaire le plus net et le plus précis qui puisse être fait de cette partie des programmes* » (voir Chavalarias, 2012). Peut-être que le statut de savant de son auteur, travaillant dans divers domaines non cloisonnés des sciences, comme en témoigne sa participation à l'expédition en Laponie pour déterminer l'aplatissement de la Terre, n'est pas étranger à la nature de ses Elémens de Géométrie, et à l'intérêt qu'y voit aujourd'hui Étienne Ghys (Ghys, 2013).

La place des grandeurs dans la vie des hommes

> *L'oubli de la notion de grandeur ferme les mathématiques sur elles-*mêmes*. En sens inverse, l'exploration de l'univers des grandeurs constitue le point de départ de l'exploration mathématique de la diversité du monde. L'introduction mathématique au monde qui nous entoure suppose donc prise de contact et familiarisation avec l'univers des grandeurs.* (Chevallard, Bosch, 2002)

Que les longueurs, angles, aires et volumes soient très présentes dans la vie des hommes, cela ne fait guère de doute. Arpentage, astronomie, urbanisme, architecture, déplacements, échanges de biens ou de marchandises, autant de domaines où pour des raisons pratiques ces grandeurs et leurs mesures ont vu le jour et ont été étudiées pour répondre à une foule de questions que se sont posées et se posent toujours les hommes, comme celles-ci :

- ***mesurer*** des longueurs, des angles, pour calculer des trajets, des longueurs inaccessibles, pour dresser des plans, pour s'orienter

- ***partager*** des longueurs ou des angles pour construire des instruments de mesure

- ***calculer*** des longueurs pour clôturer des propriétés, planter des haies, prévoir des coûts de matériaux vendus au mètre, pour construire des figures

- ***comparer ou partager*** des surfaces agricoles pour les échanger, les acheter, les vendre

- ***comparer ou évaluer*** des aires à partir de figures à l'échelle, à partir d'un plan, de photos aériennes (Google Earth, IGN, ..), à partir d'un schéma

- ***calculer*** une aire pour estimer une quantité de peinture, de semence, de tuiles, de carrelage, de papier pour un patron ou encore pour déterminer un prix (terrain à bâtir, crépi d'une maison…)

- ***calculer*** des volumes pour le transport de marchandises, pour fabriquer des solides de volume donné (emballages, cuves,…)

- …

Ce sont ces problèmes pratiques de comparaison, de partage, de mesure et de calcul des grandeurs qu'a pris en charge la géométrie, et plus largement les mathématiques, au point d'en donner la définition suivante : *Les mathématiques ont pour objet de mesurer, ou plutôt de comparer les grandeurs* (Bossut, 1784). On entrevoit que les solutions qui vont être apportées par les mathématiques vont vouloir être générales. Cependant, de nombreux obstacles vont apparaitre et obligeront les mathématiques à développer des méthodes adaptées à des classes de situations, et à inventer de nouveaux concepts et de nouveaux outils.

Prenons par exemple le cas de la mesure des aires. *Mesurer l'aire d'une figure, c'est choisir une figure comme unité, et trouver combien d'unités se trouvent dans la figure*. Problème plus ou moins simple selon le choix de l'unité et la forme et les dimensions de la figure à mesurer.

Choisissons un carré pour unité. On peut facilement mesurer l'aire d'un rectangle en le découpant en carrés unité, ou en le recouvrant de carrés unité : sa mesure est le nombre de carrés qui le composent. Si l'on choisit pour unité de longueur celle du côté du carré unité, alors cette mesure peut s'exprimer par la formule bien connue : Longueur × largeur. À condition que les côtés du rectangle mesurent un nombre entier de fois la longueur du côté du carré unité. Si ce n'est pas le cas, ce procédé permettra toutefois d'obtenir un encadrement de la mesure.

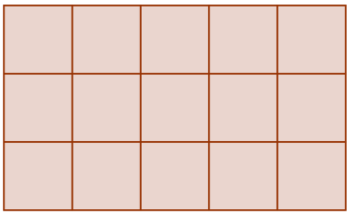


Figure 2 : Aire du rectangle = Longueur × Largeur

Mais en prenant un carré unité plus petit (par exemple de côté 10 fois plus petit), on aura un meilleur recouvrement, et toujours la même formule. La répétition de ce processus permet de trouver une mesure de l'aire aussi précise que l'on veut et de comprendre la validité de la formule donnant l'aire du rectangle quelles que soient ses dimensions.

La méthode du quadrillage va pouvoir s'utiliser pour toute sorte de figures, mais le dénombrement des carrés peut devenir difficile voire impraticable, en particulier avec des objets réels (aire d'un bois, d'un lac, d'un pays …). Pour ces derniers, on va par exemple en faire des plans qui justifient l'utilisation d'une échelle de réduction et la mise au point de techniques de reproductions de figures à partir de longueurs et d'angles mesurables, en utilisant une échelle de réduction. Pour des figures comme le cercle ou l'ellipse on peut découper des bandes rectangulaires et utiliser la formule de l'aire du rectangle.

Si avec des carrés il est facile de faire des rectangles, il va par contre être difficile de réaliser d'autres figures simples comme le triangle ou le losange. D'où l'idée, pour calculer l'aire d'une figure, de la découper en morceaux et avec ces morceaux de reconstituer un rectangle.

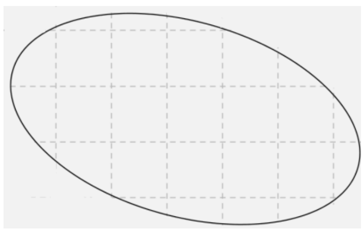


Figure 3 : **Quadrillage de l'ellipse avec des carrés unité**

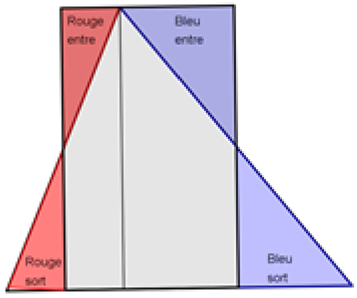


Figure 4 : Un découpage chinois du triangle

Cette méthode du découpage va permettre de ramener l'aire de toute figure polygonale à celle d'un rectangle, et d'établir pour des formes usuelles de figures polygonales des formules de calcul à partir de certaines longueurs de la figure (hauteur, base, apothème …).

Pour des figures courbes, rien de général, mais on peut utiliser la méthode du découpage en un nombre infini de fois. C'est ce qui a permis à Archimède de trouver une formule pour l'aire du cercle : A = ½ périmètre × diamètre.

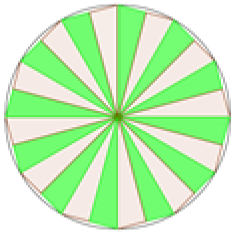


Figure 5 : Découpage du 12-gone inscrit dans le cercle

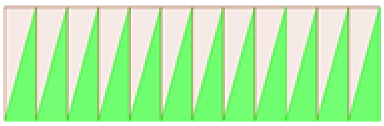


Figure 6 : Rectangle de même aire que le 12-gone

Cette formule est bien utile au forestier qui peut mesurer facilement la circonférence et le diamètre d'un arbre, et en déduire le cubage de l'arbre avec la mesure de sa hauteur. Cet exemple montre comment la recherche de formules de calcul d'aire de figures en fonction des grandeurs facilement accessibles à la mesure, se justifie dans des situations rencontrées dans la vie. C'est ainsi qu'Héron d'Alexandrie établit géométriquement sa célèbre formule donnant l'aire d'un triangle en fonction de la longueur de ses trois côtés. Les méthodes du quadrillage et du découpage sont des sources d'inspiration pour les méthodes de calcul numérique et d'intégration que nous utilisons maintenant et qui permettent d'élargir le champ des domaines dont on peut calculer l'aire.

Remarquons que les techniques, qu'elles reposent sur le découpage des surfaces, l'utilisation du quadrillage, l'utilisation de formules, loin de se substituer les unes aux autres, de se hiérarchiser les unes par rapport aux autres, se complètent, et s'enrichissent. Leur apprentissage de toutes ces techniques oblige à se familiariser avec les propriétés et la construction des différentes figures géométriques qui deviennent alors fonctionnelles : on voit à quoi elles servent et quels types de problèmes elles permettent de résoudre.

Ces quelques considérations montrent que ces questions de comparaison, de mesure, de calcul d'une grandeur restent largement ouvertes pour des études courant sur toute la scolarité. Que même si on crée des savoir-faire, ceux-ci reposent sur une classe bien précise de problèmes, laissant le champ libre à d'autres études.

Nos choix

Le bilan que nous tirons des analyses précédentes nous amène aux choix suivants.

Ne pas séparer l'apprentissage des grandeurs géométriques de celui de la géométrie

Même si le programme a choisi d'en faire deux parties séparées, il incite à établir des liens entre ces parties. On peut lire dans l'introduction de la partie 3 *Espace et géométrie* du programme de cycle 3 : *Les activités spatiales et géométriques sont à mettre en lien avec deux thèmes : résoudre des problèmes de proportionnalité, utiliser en situation les grandeurs (géométriques) et leur mesure.* Et dans les repères de progressivité : *On peut noter que certaines compétences de construction sont menées conjointement avec les apprentissages du domaine « grandeurs et mesures ».*

Faire de la géométrie à partir de l'étude des grandeurs

On peut parcourir toute la géométrie du cycle 3 à partir de problèmes de comparaison, de partage, de mesure et de calcul des longueurs, angles, aires, et volumes. On en trouvera des réalisations effectives dans nos brochures : *Enseigner les mathématiques à partir des grandeurs* (voir, à la fin de la bibliographie, la rubrique : *Mises en œuvre réalisées*). Ces problèmes sont en prise directe avec la vie des hommes et permettent de comprendre comment s'est construite la géométrie élémentaire, et en quoi c'est une science au service des hommes. On réconcilie ainsi l'enseignement des mathématiques avec la société.

Des conséquences découlent de ces choix.

- Un apprentissage conjoint des trois parties du programme. En effet, les problèmes liés au partage des grandeurs et à leur mesure débouchent sur la nécessité de l'utilisation de nombres entiers, fractions, décimaux, irrationnels … Ils permettent de travailler les contenus de la première partie du programme *Nombres et calculs* sur des situations porteuses de sens. Cela correspond bien à ce que l'on peut lire dans l'introduction de cette partie : *Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de nouveaux nombres introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires, et repérer des points*.

- Un apprentissage progressif. Dans l'étude de chaque grandeur, on retrouve les mêmes types de tâche (comparer, partager, mesurer, calculer), et les mêmes objets mathématiques (figures géométriques, entiers, fractions, décimaux). Elles permettent un apprentissage progressif sur l'année et sur le cycle.

- ***Sur l'année*** : dans l'étude de chaque grandeur on retrouve des connaissances géométriques et numériques qui ont été vues dans les précédentes, mais qui sont réutilisées, réinvesties et approfondies dans un contexte différent.

- ***Sur le cycle*** : pour chaque grandeur on aborde, à chaque niveau, de nouveaux types de situations qui permettent d'approfondir les questions qui ont été étudiées au niveau précédent, ou d'en introduire de nouvelles.

- Un apprentissage ouvert sur le monde et sur les autres disciplines, non pas ponctuellement, mais en continu, car les grandeurs parlent du monde qui nous entoure. Les problématiques qui les portent et les situations dans lesquelles elles vivent en font partie.

- ***Un apprentissage de la mathématisation***. La construction et l'étude des grandeurs imposent de partir du réel et d'y revenir. Les grandeurs sont ancrées dans notre vie, et ont été conçues pour essayer de maitriser et transformer le monde qui nous entoure.

Notre mise en œuvre au cycle 3 de l'apprentissage de la géométrie

C'est au travers l'étude des 4 grandeurs, longueurs, angles, aires, volumes, que nous réalisons l'apprentissage de la géométrie par les élèves. Ce sont nos 4 chapitres de géométrie. Pour chaque chapitre, et à chaque niveau, la rencontre et la familiarisation avec les notions et techniques de la géométrie se font par l'étude de situations. Elles permettent d'élaborer des techniques et stratégies pour répondre à une ou plusieurs des 4 questions : comment comparer, partager, mesurer, calculer la grandeur ?

On peut noter que *comparer*, *mesurer*, *calculer* font partie des compétences à développer pour ces grandeurs au cycle 3 (voir la partie 2 *Grandeurs et mesures* du programme) ; que *comparer*, *partager* permettent de construire la grandeur en tant que grandeur (sans mesure), et ce faisant de construire les connaissances et compétences géométriques du programme ; et que *mesurer*, *calculer* permettent de construire les compétences numériques et pré-algébriques (utilisation de formules) du programme.

Voici nos choix pour chaque année liés aux compétences et connaissances à faire acquérir à chaque niveau :

- ***pour les aires*** : comparer, partager, mesurer, calculer sont traités dans les classes de CM1, CM2 et 6^{e}, la progression étant dans un approfondissement progressif, en particulier pour le calcul avec une formule où l'aire du triangle et du cercle est réservé à la 6^{e}. La progressivité ne se joue pas au niveau des questions, mais des techniques (enrichissement de celles-ci), et des situations (figures en jeu, leurs constructions, les problèmes à résoudre ...).

- ***pour les volumes*** : comparer, partager, mesurer des contenances (CM1, CM2), mesurer, calculer (pour le pavé en 6^{e})

- ***pour les angles*** : comparer, partager, calculer (CM1, CM2), partager, mesurer, calculer (6^{e})

- ***pour les longueurs*** : comparer, partager, mesurer, calculer (cycle 2), calculer le périmètre avec ou sans formule en cycle 3 (carré rectangle : CM1, CM2, cercle : 6^{e}).

	Comparer	Partager	Mesurer	Calculer
Aires	CM1, CM2 et 6ème			
Volumes	CM1, CM2		CM1, CM2, 6ème	6ème
Angles	CM1, CM2		6ème	Cycle 4
Longueurs	Cycle 2		Cycle 3	Cycle 3

Un exemple : les aires (Voir Tarra Fabrice, 2010, et IREM de Poitiers, 2010)

> *Il faut donc de toute nécessité être en possession de la notion d'aire avant de calculer des aires.* (Lebesgue, 1935)

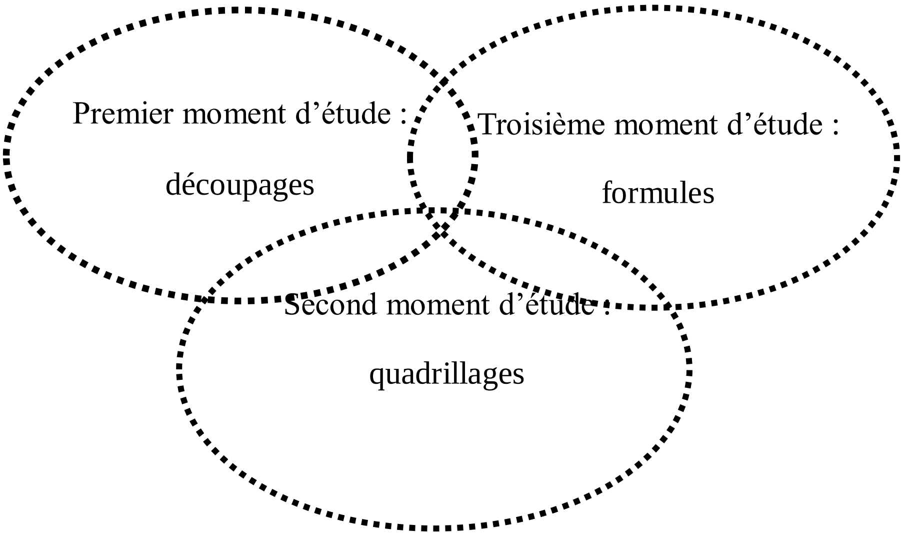


Figure 7

Premier temps de l'étude : les découpages.

On met en lumière que, par des découpages ou des assemblages, on peut comparer des aires, résolvant ainsi toute une classe de problèmes et mettant au point la notion de grandeur. Nous mettons l'accent sur une figure particulière : le rectangle. Sa place est fondamentale, car on peut transformer ainsi tout polygone d'aire donnée en un rectangle de même aire (Voir *APMEP & Puzzles*, pôle 4, 2016).

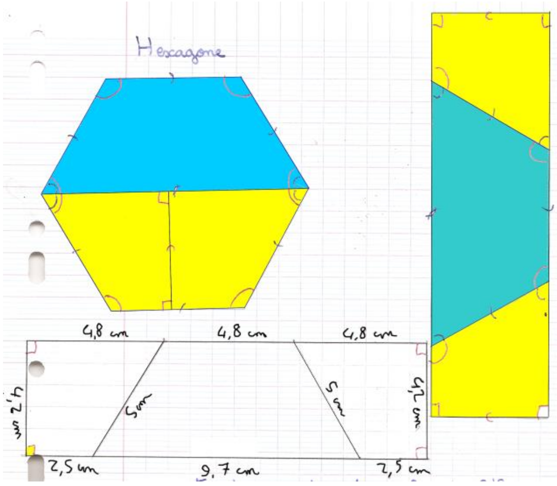


Figure 8 : Transformation de l'hexagone régulier en rectangle : 3 pièces

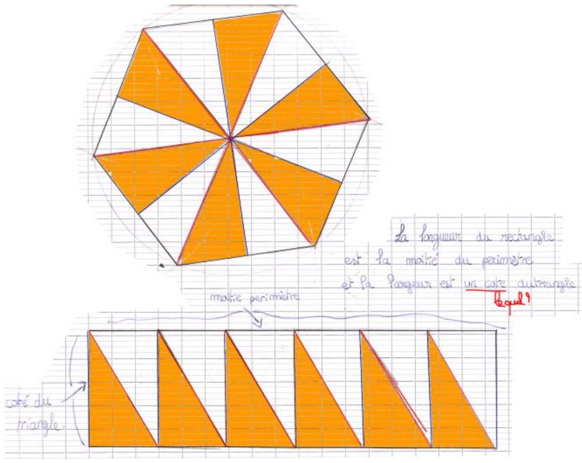


Figure 9 : Transformation de l’hexagone régulier en rectangle : 12 pièces

Deuxième temps de l’étude : les quadrillages.

C’est un outil de mesure des aires qui met en œuvre la définition de la mesure d’une aire (report d’une unité choisie et dénombrement). Il peut se transformer facilement en un instrument (quadrillage sur transparent) qui correspond à ce qu’est la règle graduée pour les longueurs. Son utilisation pose d’emblée le problème de l’utilisation de sous unités, et donc de l’utilisation de nombres décimaux illimités (dont l’écriture peut se poursuivre indéfiniment : les nombres de Lebesgue).

Il apparait que le maillage du plan par un réseau est un outil efficace pour résoudre une classe supplémentaire de problèmes. Il permet de valider la formule de l’aire d’un rectangle quels que soient les nombres qui mesurent ses côtés, et de calculer des encadrements de l’aire de figures aux contours très divers.

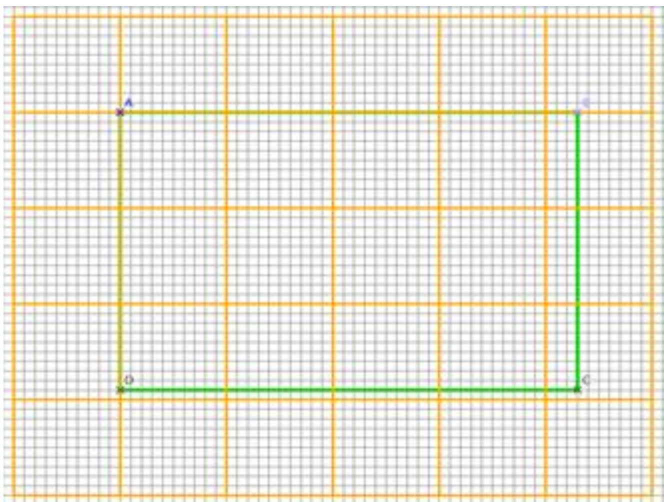


Figure 10 : Aire du rectangle

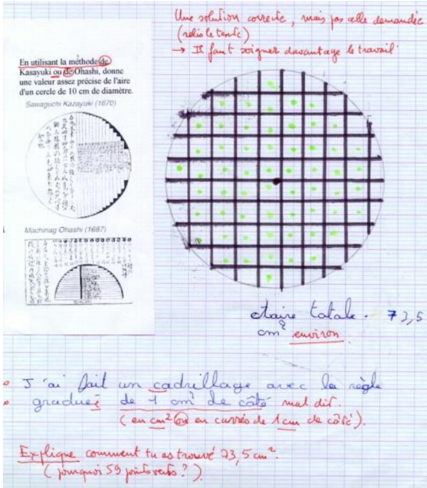
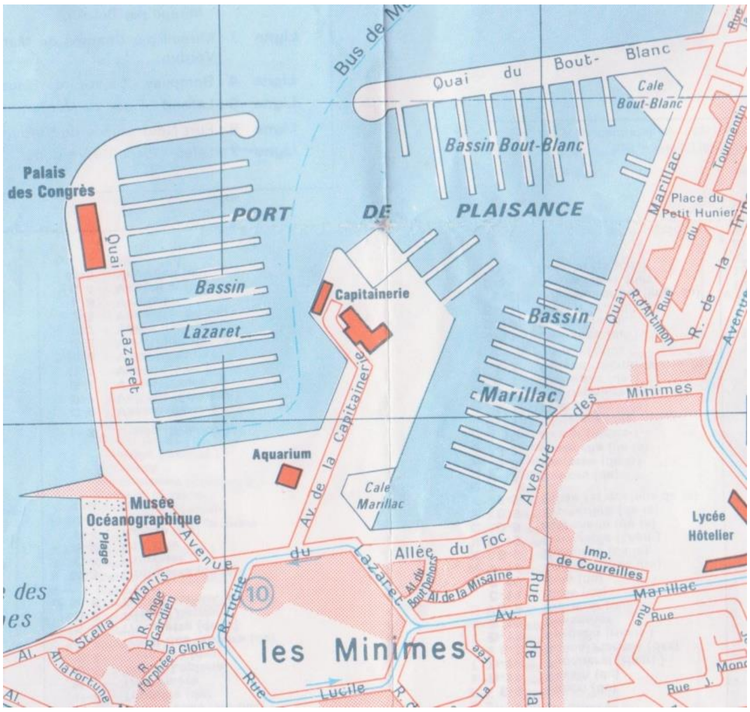


Figure 11 : Aire du cercle

Dernier temps de l'étude : les formules. On montre la richesse de l'utilisation de la formule précédente (aire du rectangle) pour résoudre toute une nouvelle classe de problèmes. Le découpage du premier temps de l'étude permet d'établir des formules ou des algorithmes de calcul pour des figures usuelles, mais aussi de découper la figure dont on cherche l'aire en figures simples dont on peut calculer l'aire comme pour calculer la superficie du port des Minimes de La Rochelle.

Superficie du port des Minimes à La Rochelle

> *« À partir du plan ci-dessous, trouve la superficie du port de plaisance en m² et en ha, en sachant que 1 cm sur la carte vaut 100 m dans la réalité. Explique ta méthode et ton résultat. »*



Les techniques nouvelles, loin de se substituer aux techniques précédentes, doivent apparaitre comme répondant à une classe supplémentaire de problèmes dont les exercices en feront une routine, quitte à ce que la technique s'améliore. Est-ce le découpage, l'assemblage, le décalquage qui me sera utile ? Est-ce l'utilisation du maillage, du réseau ? Est-ce l'utilisation de la formule ? Sont-ce les trois techniques en même temps ?

C'est au prix d'une telle construction du parcours que le savoir apparaîtra comme une connaissance disponible. La progression dans l'étude ne doit pas écarter les connaissances précédentes. Même si les moments d'études s'enchaînent chronologiquement, ils ne se hiérarchisent pas selon « l'importance » du savoir. Seule la classe de problèmes associés au type de tâche et la construction de la grandeur justifient le découpage. La chronologie du parcours répond donc à une autre exigence, celle de la nécessité d'une organisation mathématique utile à la construction des techniques, mais pas à leur performance relative.

Les aires : un parcours sur toute la scolarité

L'analyse précédente a amené à privilégier le rectangle. Pour les aires, c'est la rectangulation, pour les volumes c'est la cubature (où la parallépipédisation) ramenant tout volume à un pavé droit (ou à un prisme droit - à base triangulaire - qui en est « sa moitié »). De plus tout est démontrable, et pour que cela soit possible, il ne faut pas oublier d'étapes permettant d'établir les liens entre toutes les figures géométriques. Or actuellement, prévaut une idée de la non nécessité de démontrer qui se traduit, devant la contrainte –organisée- du manque de temps, par : on ne démontre plus rien. Cela se fait à partir des figures du programme à savoir les triangles et quadrilatères ayant des axes de symétrie, ces axes étant des indicateurs forts des découpages à opérer. Le triangle et la recherche de pièces articulées ont davantage leur place en 5^{e} avec la symétrie centrale et l'aire du triangle. L'axe fort sera alors la triangulation. On voit ainsi comment le parcours sur les aires peut se poursuivre au fil de la scolarité. Pour le calcul des aires en 6^{e} et la 5^{e}, il est important que les figures soient données mais pas leur dimensions : il s'agira donc, comme dans la vie pratique, de savoir quelles dimensions mesurer pour pouvoir faire les calculs. Si des dimensions sont données, comme sur un plan, il ne faudrait pas qu'il y ait uniquement les dimensions utiles pour faire le calcul. Comme on peut le voir dans les manuels, avec parfois une faute contre la raison en donnant les mesures des 3 côtés d'un triangle rectangle pour obliger l'élève à faire un choix ! En 4^{e} et 3^{e} le parcours sur les aires peut se poursuivre comme un lieu pour problématiser le calcul des longueurs et des angles (Pythagore, Thalès, trigonométrie). Pour les longueurs et les angles que l'on a pu mesurer en 6^{e} et 5^{e}, établir de nouvelles formules pour calculer des aires permet de gagner en précision, ce qui peut être indispensable par exemple en astronomie. On peut le faire pour l'aire d'un triangle (cf. arpentage), dont on a pu mesurer la longueur de 2 côtés et un angle, ou 1 côté et 2 angles, ou les 3 côtés. Cela amène rapidement à justifier des mathématiques plus sophistiquées. Par exemple pour trouver la formule de Héron pour le triangle, on mesure l'ampleur de toutes les connaissances qu'il faut maîtriser.

Concernant le problème du découpage des aires, on voit là aussi que ce problème, si simple dans son énonciation et pour certaines figures, peut devenir très complexe (c'est une des caractéristiques des mathématiques qu'il ne faudrait pas perdre de vue). Par exemple la quadrature du rectangle qui consiste trouver un carré et un rectangle de même aire est simple lorsqu'il s'agit de passer d'un carré au rectangle est facile alors que l'inverse est plus ardu mais peut être traité en 3^{e}. Le découpage articulé, comme pour la table géniale que nous présentons en début de parcours, est un problème de recherche pour les mathématiciens contemporains... (Voir *APMEP & Puzzles,* 2016).

La démarche de cycle 3 peut donc être poursuivie en cycle 4, avec les mêmes grandes questions, élargies et d'autres grandeurs pour faire aborder l'ensemble des notions des programmes.

Conclusion

Nous espérons avoir montré que géométrie, mesure des grandeurs, nombres et calculs entretiennent des liens naturels, qui permettent d'articuler l'enseignement des 3 parties du programme de cycle 3 autour de l'étude des grandeurs. Cela a en outre l'avantage d'assoir cet enseignement sur l'étude de situations de la vie des hommes d'hier et d'aujourd'hui, associant culture et modernité.

Références

APMEP, (2016) *Maths & Puzzles.* Brochure n°1009. APMEP : Paris.

ARCHIMÈDE, (1807). *La mesure du cercle.* Dans *Œuvres d'Archimède,* traduites par Peyrard, F. Buisson, Paris.

AYMES Jean, (1988). *Ces problèmes qui font les mathématiques (la trisection de l'angle).* Brochure n°70. APMEP : Paris.

CHAMBRIS Christine, (2007). Petite histoire des rapports entre grandeurs et numérique dans les programmes de l'école primaire. *Repères-IREM*, 69, pp. 5-31. Metz : Topiques éditions.

CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana, (2001). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie I. Une Atlantide oubliée. *Petit x*, 55, pp. 5-32, IREM : Grenoble.

CHEVALLARD Yves, BOSCH Mariana, (2002). Les grandeurs en mathématiques au collège. Partie II. Mathématisations. *Petit x,* 59, pp. 43-76, IREM : Grenoble.

CHEVALLARD Yves, (2007). Les mathématiques à l'école : pour une révolution épistémologique et didactique. *Bulletin APMEP* 471, 2007, pp. 439-461. APMEP : Paris.

CHEVALARIAS Nathalie, (2012). *Des figures semblables à la similitude dans l'enseignement secondaire français : 1845-1910. Des choix témoins des tensions entre pratique et théorie dans l'enseignement des mathématiques*. Mémoire de Master de recherche, Université de Nantes.

CLAIRAUT Alexis, (1741). *Élémens de Géométrie.* Lambert et Durand : Paris.

EUCLIDE, *Les Éléments.* (1990-2001). Traduction et commentaires Bernard Vitrac, Vol. 1, Introduction générale, Livres I à IV, 1990, Vol.2, Livres V à IX, 1994, Vol. 3, Live X, 1998, Vol. 4, Livres XI à XIII, 2001. PUF : Paris.

GHYS Étienne, (2013). *Les "éléments de géométrie" de Clairaut (1741) : une manière moderne d'enseigner la géométrie ?* Conférence pour le tricentenaire de Clairaut, mathématicien et géophysicien, Académie des sciences, 14 mai 2013 (http://www.academie-sciences.fr/fr/Colloques/tricentenaire-de-clairaut-mathematicien-et-geophysicien.html).

GUICHARD Jean-Paul, (2009). Les volumes en classe de sixième. *Repères IREM 76*, pp. 5-29, juillet 2009. Metz : Topiques éditions.

GUICHARD Jean-Paul, (2014). Quarrer des figures. *Les constructions mathématiques avec des instruments et des gestes*, dir. Évelyne Barbin, p. 57-86. Ellipses : Paris.

GUICHARD Jean-Paul, (2015). L'angle, un concept ambivalent, et La mesure des angles. *Tangente* Hors Série n° 53, pp. 22-29, 98-101. Éditions Pole : Paris.

HADAMARD Jacques, (1922). *Leçons de géométrie élémentaires, tome 1 Géométrie plane.* 2e éd., Armand Colin : Paris.

HÉRON d'Alexandrie, (2014). *Metrica*, introduction, texte critique, traduction française et notes de commentaire par Fabio Acerbi et Bernard Vitrac, Fabrizio Serra éditeur : Pise-Rome.

IREM de Poitiers, (2017). *Algorithmique et programmation au cycle 4 à partir des grandeurs.* IREM de Poitiers : Poitiers.

LEBESGUE Henri, (1935). La mesure des grandeurs. Monographies de *L'Enseignement Mathématique* n° 1, Genève. Réédition A. Blanchard 1975 : Paris.

LEGENDRE Adrien-Marie, (1817). *Eléments de géométrie*. Firmin Didot, 11e éd., Paris.

PRESSIAT André, (2009). La place des grandeurs dans la construction des mathématiques. APMEP, *Bulletin APMEP* 483, 2009. APMEP : Paris.

ROUCHE Nicolas, (1994). Qu'est-ce qu'une grandeur ? Analyse d'un seuil épistémologique. *Repères -IREM*, 15, pp. 25-36. Metz : Topiques éditions.

TARRA Fabrice, (2010). Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs, *Repères IREM*, 78, pp. 71-100. Janvier 2010. Metz : Topiques éditions.

Mises en œuvre réalisées

IREM de Poitiers, *Enseigner les mathématiques en sixième à partir des grandeurs :* les Angles (2009), les Aires (2010), les Volumes (2011), les Longueurs (2012).

Brochures disponibles à l'IREM de Poitiers (http://irem2.univ-poitiers.fr/portail/)