

Rencontres autour de la compétence « Modéliser » en mathématiques



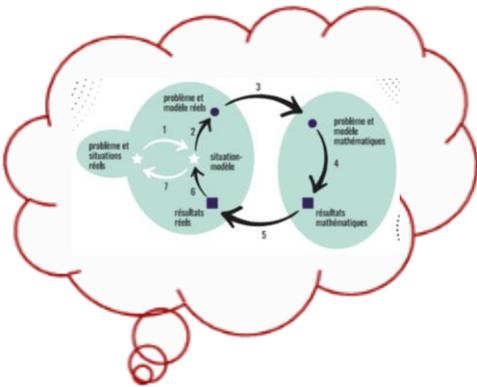
Une formation des enseignants a la
modélisation : modèles, ostensifs et
nouveaux besoins épistémologiques

Berta Barquero et Marianna Bosch

Universitat de Barcelona. Faculté d'Education

bbarquero@ub.edu, marianna.bosch@ub.edu

Poitiers, 25 mai 2023



Le point de départ : deux grandes questions

Qu'est-ce que la modélisation ou la compétence « modéliser » ?

... comme objet à enseigner (et à apprendre)

... comme activité scientifique

... pour analyser, concevoir, gérer, développer son enseignement

→ **Construction collective à faire et à partager, discuter, renouveler**



Comment enseigner la modélisation ou la compétence « modéliser » ?

... au Primaire, Collège, Lycée, Université

... en formation d'enseignants

→ **Construction collective de dispositifs et infrastructures pour l'enseignement à partager, discuter, renouveler**

Besoins épistémologiques

Besoins didactiques

Structure de la conférence

- ① La modélisation d'après la théorie anthropologique du didactique (TAD)
Exemple : Quel cadenas est plus sûr ?
- ② Pourquoi et comment enseigner la modélisation ? La modélisation dans le paradigme de questionnement du monde
Exemple : Un parcours d'étude et de recherche (PER) sur les cadenas
- ③ Formation des enseignants pour la modélisation : les PER-FE
Exemple : La boîte du pâtissier
- ④ Pour finir: des rapports complexes entre systèmes et modèles
Exemple : La ségrégation scolaire

Références

- Barquero, B., Bosch, M., & Florensa, I. (2022). Contribuciones de los recorridos de estudio e investigación en la universidad: el caso de la formación del profesorado. *AIEM*, 21, 87–106.
- Chevallard Y. (1989). Le passage de l'arithmétique à l'algèbre dans l'enseignement des mathématiques au collège. Deuxième partie. Perspectives curriculaires : la notion de modélisation. *Petit x*, 19, 43-72.
- Chevallard Y. (2015). Teaching mathematics in tomorrow's society: A case for an oncoming counter paradigm. Dans S. J. Cho (Ed.), *The proceedings of the 12th ICME* (pp. 173–187). Springer.
- Vásquez S., Barquero B., & Bosch, M. (2021). Teaching and learning combinatorics in secondary school: a modelling approach based on the Anthropological Theory of the Didactic. *Quadrante*, 30(2), 200–219.
- Wozniak F. (2012). Des professeurs des écoles face à un problème de modélisation : une question d'équipement praxéologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 32(1), 7-55.

École d'Été de Didactique des Mathématiques (sous presse)

- Barquero, B. (2023). La modélisation mathématique comme domaine de recherche: avances dans l'analyse ecologique. *Actes 21e École d'Été de Didactique des Mathématiques* (Oct 2021). Ile de Ré (France).
- Wozniak, F., Barquero, B., Bosch, M., & Kaspary, D. (2023). Les praxéologies muettes de la modélisation. *Actes 21e École d'Été de Didactique des Mathématiques* (Oct 2021). Ile de Ré (France).

COPIRELEM (sous presse)

- Barquero, B. (2023). Questionner la modélisation mathématique à l'école primaire: Les parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants. *Actes 48e Colloque COPIRELEM* (June 2022). Toulouse (France).

1. La modélisation d'après la TAD

■ Une perspective **simple et flexible**

- Deux principaux éléments : notions de « **système** » et de « **modèle** »
- Les notions de système et modèle sont des **fonctions** et non pas des qualités : une entité n'est pas système ou modèle mais **agit comme système** ou **modèle**

■ Une perspective **unitaire et générale**

- La modélisation en mathématiques comme dans l'activité scientifique en général (y inclus la didactique)
- La modélisation comme moteur : on utilise un **modèle** pour produire des connaissances sur un **système**

(Chevallard, 1989, 1992)

1. La modélisation d'après la TAD : systèmes et modèles

■ La nature des systèmes

- Un **système modélisable** est considéré comme un domaine de la réalité, sans aucune limitation, qui puisse être isolé du reste –même si ce n'est que de manière hypothétique–. La notion de système inclut les **systèmes mathématiques**.

■ La fonction des modèles

- L'intérêt ou la fécondité d'un modèle réside dans sa capacité à **produire des connaissances sur le système modélisé**, connaissances que nous ne pouvons obtenir directement à partir du système.
- La problématique de l'**adéquation du modèle au système** est au **cœur de l'activité de modélisation**.
- La modélisation est une dimension essentielle de l'activité mathématique (et scientifique en général). (Chevallard, 1989, 1992)

1. La modélisation d'après la TAD : processus

PRINCIPALES ÉTAPES DU PROCESSUS DE MODÉLISTION

- Délimitation du système que l'on entend étudier, en précisant les « aspects » pertinents par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système
- Construction du modèle
- Travail du modèle pour produire des connaissances relatives au système étudié

(Chevallard, 1989)

1. La modélisation d'après la TAD : processus et questions

PRINCIPALES ÉTAPES DU PROCESSUS DE MODÉLISTION

QUESTION DE DÉPART

- Délimitation du système que l'on entend étudier, en précisant les « aspects » pertinents par rapport à l'étude que l'on veut faire de ce système Questions sur le système

- Construction du modèle Questions sur le modèle

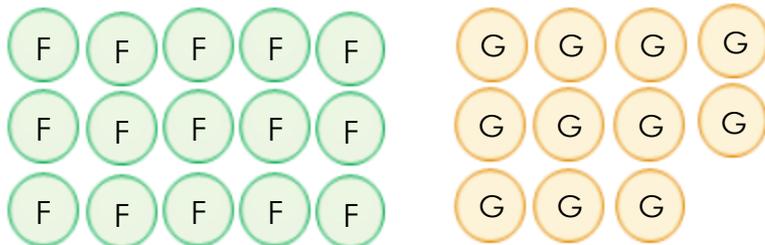
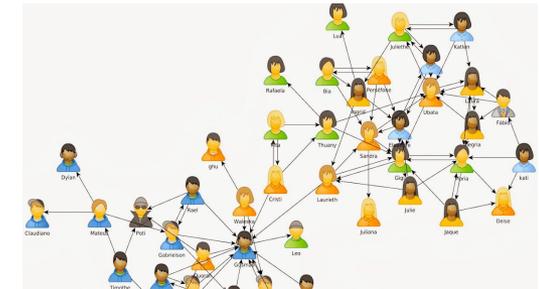
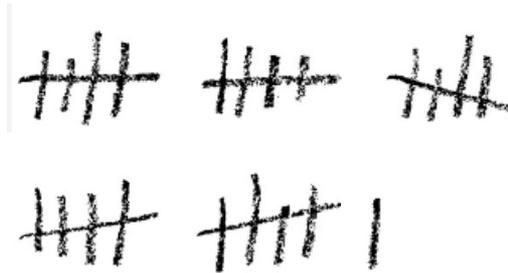
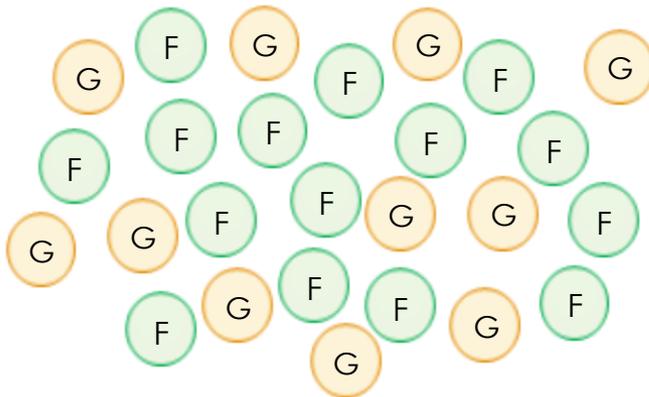
- Travail du modèle pour produire des connaissances relatives au système étudié Questions sur les rapports système-modèle

RÉPONSE FINALE et nouvelles questions

(Chevallard, 1989)

EXEMPLE : systèmes et modèles

Combien de filles et de garçons dans la classe ?



15/26 et 11/26

58% et 42%

15/11

15

11

1. La modélisation d'après la TAD : les praxéologies

Comment faire le lien entre la **notion de modélisation** et la description des activités humaines et des savoirs **en termes de praxéologies** ?

Toute activité humaine peut se décrire en termes de **praxéologies**
→ *praxis* (types de tâches et techniques) et *logos* (technologies et théories)

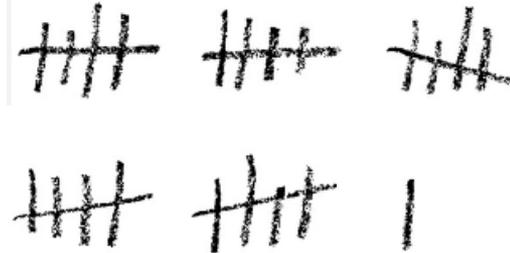
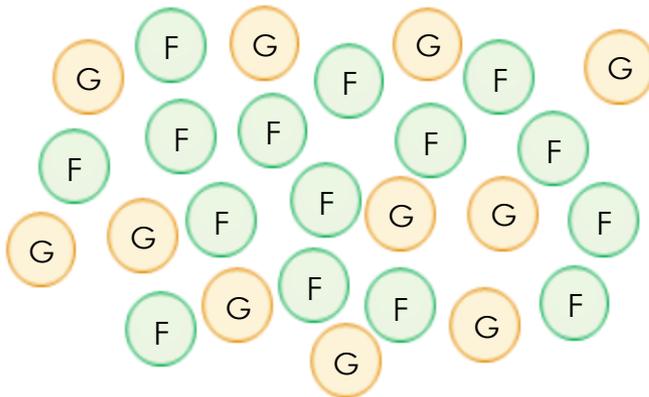
$$\mathcal{P} = [T / \tau] \oplus [\theta / \Theta] = [T / \tau / \theta / \Theta]$$

Les modèles et les systèmes relèvent de praxéologies

- Un **système** inclut des éléments qui font partie de **praxéologies**, d'où son intérêt : on questionne un système parce qu'on veut faire ou savoir quelque chose à son propos.
- Un **modèle** n'est pas uniquement un **objet ostensif** (perceptible) mais un élément (passé, présent ou potentiel) d'une **praxéologie**. Un modèle doit pouvoir être mobilisé, développé, nommé, expliqué, justifié, etc.

EXEMPLE : différents modèles et différents systèmes

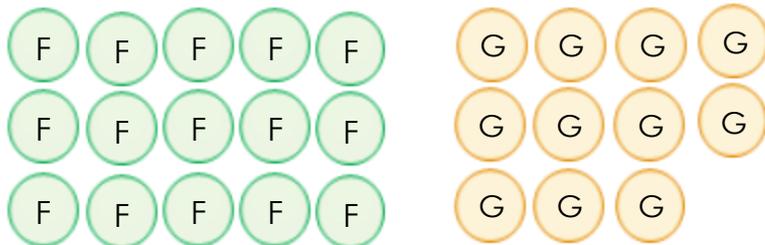
Combien de filles et de garçons dans la classe ?



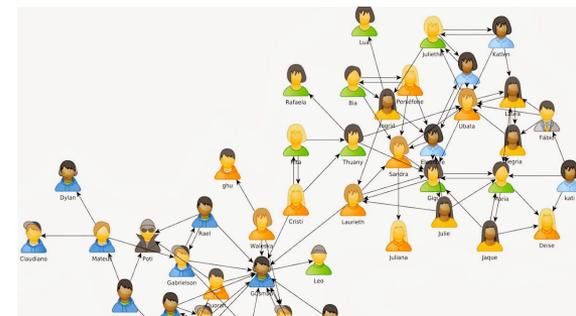
15 15/26 et 11/26

11

58% et 42%

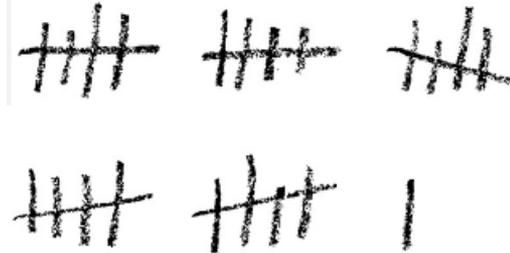
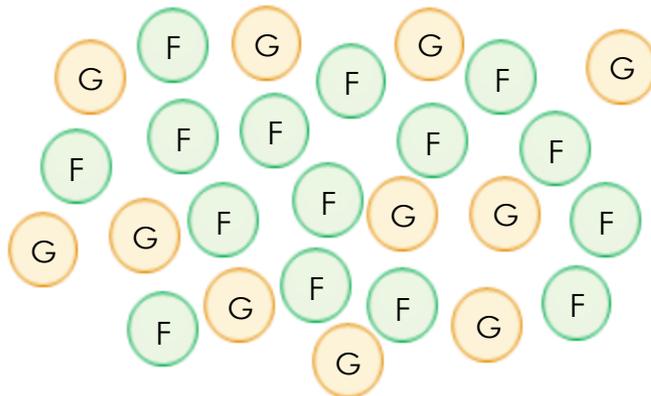


15/11



EXEMPLE : différents modèles et différents systèmes

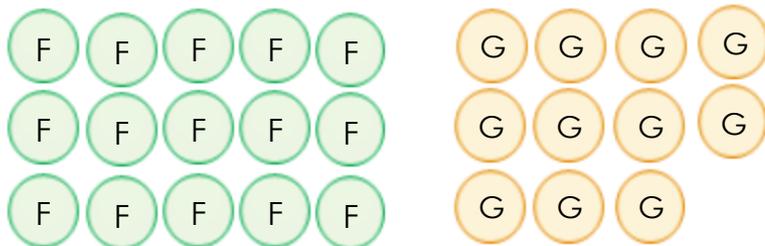
Combien de filles et de garçons dans la classe ?



15 15/26 et 11/26

58% et 42%

- 11 **Non-ostensifs :**
- Tablier vert / rose
 - Nombre entier
 - Quantité
 - Fraction
 - Pourcentage
 - Rapport



15/11

Dialectique système-modèle : la « réversibilité »

Le rapport du système au modèle peut s'inverser : **le système peut apparaître comme un modèle de son modèle.**

Quelle fraction est plus grande, $15/26$ ou $16/27$?

Dialectique système-modèle : la « réversibilité »

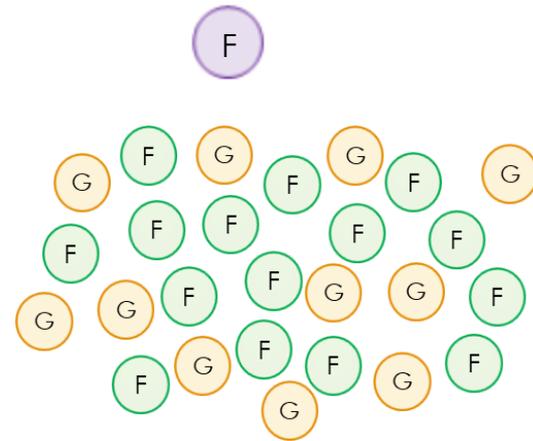
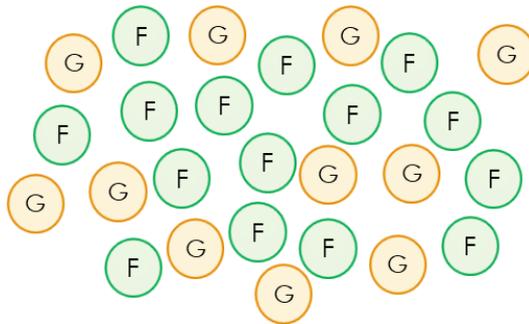
Le rapport du système au modèle peut s'inverser : **le système peut apparaître comme un modèle de son modèle.**

Quelle fraction est plus grande, $15/26$ ou $16/27$?

$$15/26 < 16/27$$

Si une nouvelle fille arrive, la proportion de filles augmente

Le modèle le plus mathématisé n'est pas toujours le plus adéquat...



Dialectique système-modèle : la « récursivité »

Récursivité du processus de modélisation : Le « travail sur le modèle » peut comporter la construction de modèles successifs, mieux adaptés à l'étude.



15

11

15/26

et

11/26

58%

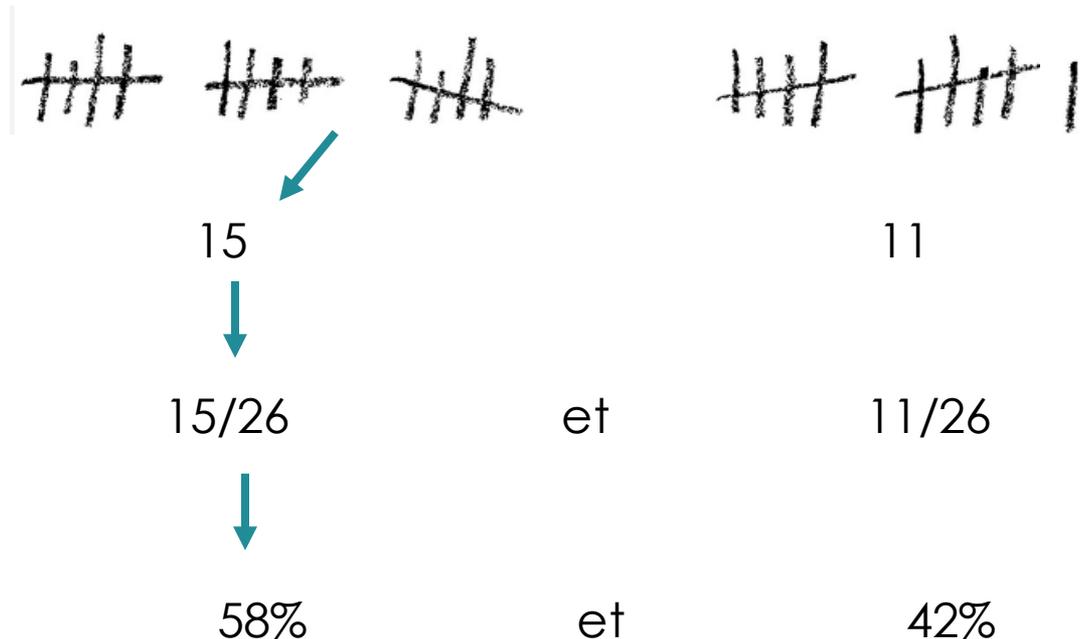
et

42%

Dialectique système-modèle : la « récursivité »

Récursivité du processus de modélisation : Le « travail sur le modèle » peut comporter la construction de modèles successifs, mieux adaptés à l'étude.

C'est pas trop petit pour être considéré un modèle... ?



Systèmes et modèles : les praxéologies de modélisation

Comment faire le lien entre la **notion de modélisation** et la description des activités humaines et des savoirs **en termes de praxéologies** ?

Toute activité humaine peut se décrire en termes de **praxéologies**
→ *praxis* (types de tâches et techniques) et *logos* (technologies et théories)

$$\mathcal{P} = [T / \tau] \oplus [\theta / \Theta] = [T / \tau / \theta / \Theta]$$

Praxéologies de modélisation :

- Délimitation du système
- Recherche, choix ou construction d'un modèle
- Travail dans le modèle
- Validation du modèle
- Contributions au système
- ...

Systèmes et modèles : les praxéologies de modélisation

Wozniak (2012)

$$p = [T / \tau] \oplus [\theta / \Theta] = [T / \tau / \theta / \Theta]$$

Praxeologies muettes

Une praxéologie muette se donne à voir uniquement au travers sa composante **praxis**, la composante **logos** n'est pas audible



Praxeologies faibles

Souvent les praxéologies de modélisation scolaires sont « muettes »

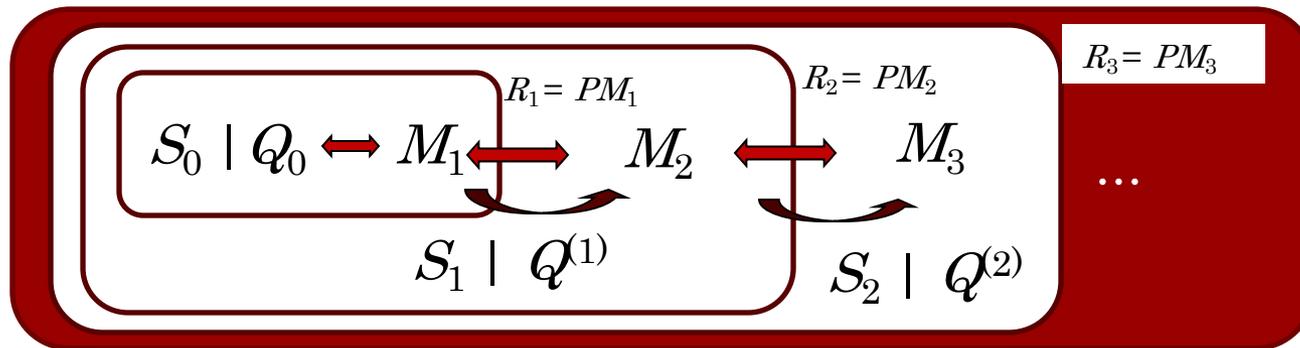
Praxeologies fortes

Une **praxéologie forte** met en œuvre dialectiquement les deux composantes **praxis** et **logos** dans des rapports d'action, de formulation et de validation



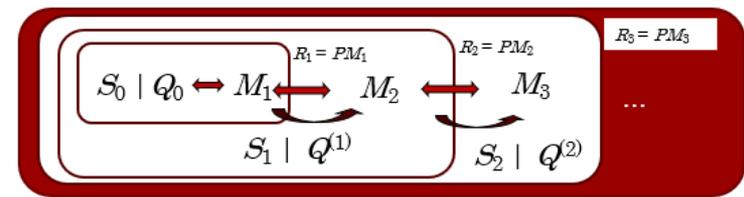
Systèmes et modèles : les praxéologies de modélisation

- L'existence des modèles se justifie toujours par le fait qu'ils facilitent **l'élaboration de réponses à des questions** (Varenne, 2009)
- L'activité de modélisation apparaît comme un processus de construction et articulation de **praxéologies** afin de répondre à certaines **questions** (Barquero, 2009; García, 2005).



Un exemple : Quel cadenas est plus sûr ?

EXEMPLE : La combinatoire dans une perspective de modélisation



Vásquez (2019-23, thèse en cours). La combinatoire dans une perspective de modélisation

Système initial S_0



Modèle 1 M_1

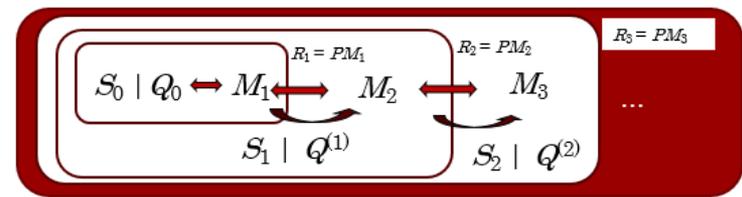
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
"012"	102	201	301	401	501	601	701	801	901
"013"	103	203	302	402	502	602	702	802	902
"014"	104	204	304	403	503	603	703	803	903
"015"	105	205	305	405	504	604	704	804	904
"016"	106	206	306	406	506	605	705	805	905
"017"	107	207	307	407	507	607	706	806	906
"018"	108	208	308	408	508	608	708	807	907
"019"	109	209	309	409	509	609	709	809	908
"021"	120	210	310	410	510	610	710	810	910
"023"	123	213	312	412	512	612	712	812	912
"024"	124	214	314	413	513	613	713	813	913
"025"	125	215	315	415	514	614	714	814	914
"026"	126	216	316	416	516	615	715	815	915
"027"	127	217	317	417	517	617	716	816	916
"028"	128	218	318	418	518	618	718	817	917

M1 Répertorier les combinaisons possibles pour chaque cadenas (manuellement ou en utilisant Excel)

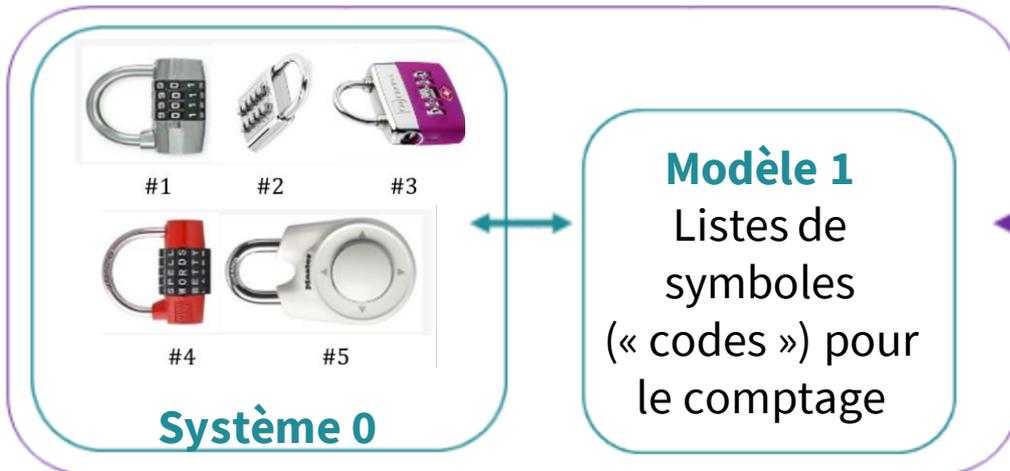
Q₀ Quel cadenas est le plus sûr ?

Q₁ Combien de « codes » peut-on former avec chaque cadenas ? Quelles stratégies plus fiables pour les dénombrer ? Comment savoir si on les a tous comptés ?

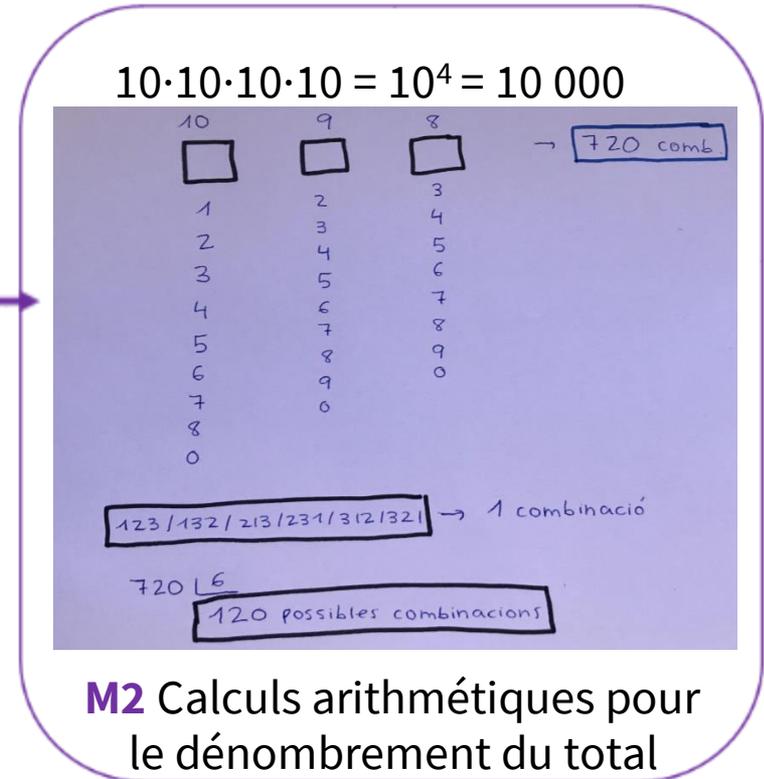
EXEMPLE : La combinatoire dans une perspective de modélisation



Système 1 S1



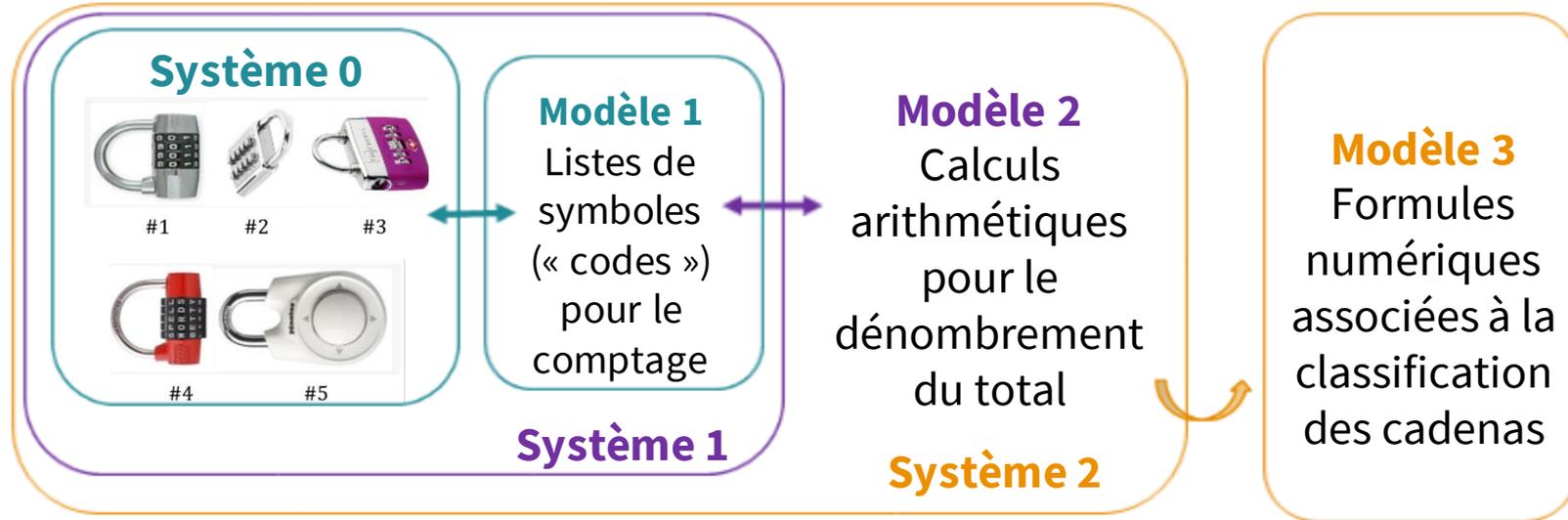
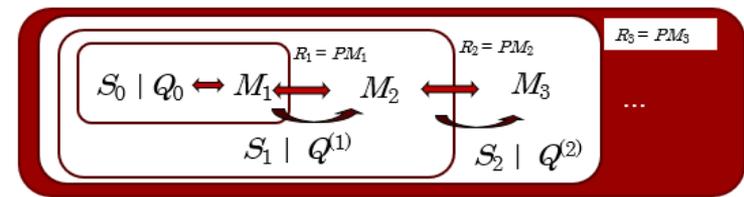
Modèle 2 M2



Q₁ Quelles stratégies plus fiables pour dénombrer les codes ? Comment savoir/valider si on les a tous comptés ?

Q₂ Peut-on utiliser les mêmes techniques pour trouver le nombre total de « codes » pour les autres cadenas ?

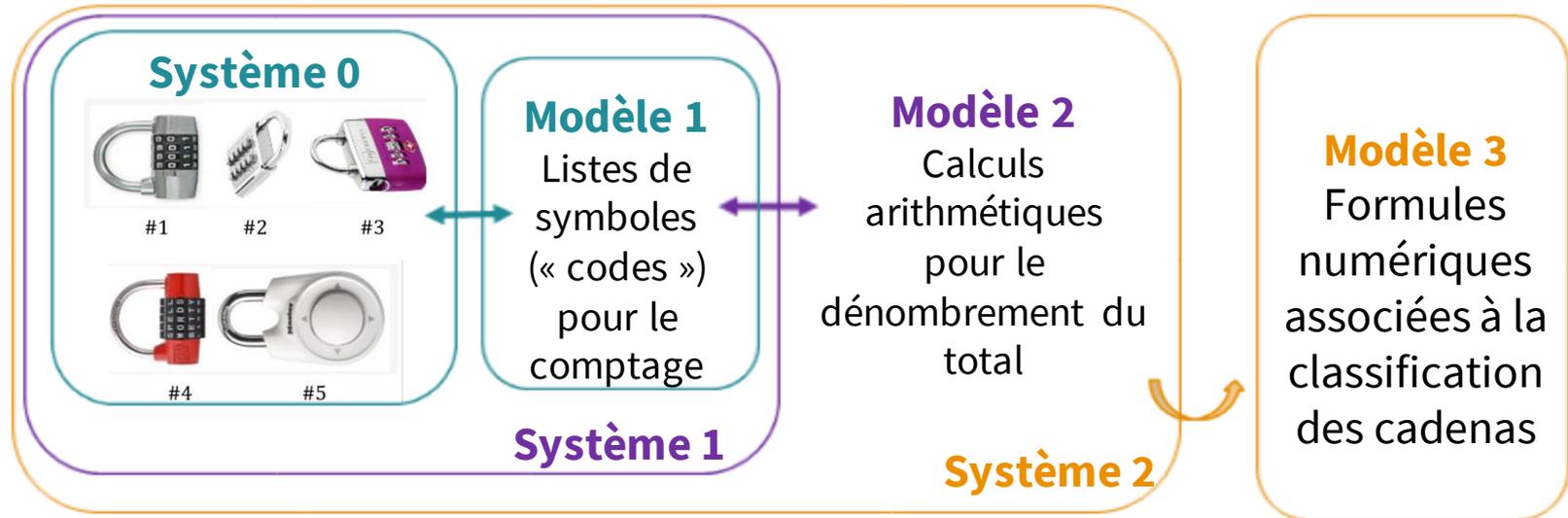
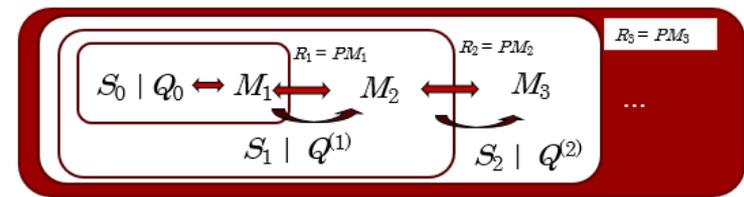
EXEMPLE : La combinatoire dans une perspective de modélisation



Q₂ Peut-on utiliser les mêmes techniques pour trouver le nombre total de « codes » pour les autres cadenas ?

Existe-t-il une formule pour simplifier le comptage total des combinaisons ?

EXEMPLE : La combinatoire dans une perspective de modélisation



Q₂ Mêmes techniques pour tous les cadenas ?

Formules ?

Let m mean the number of cells and n the number of elements in each cell:

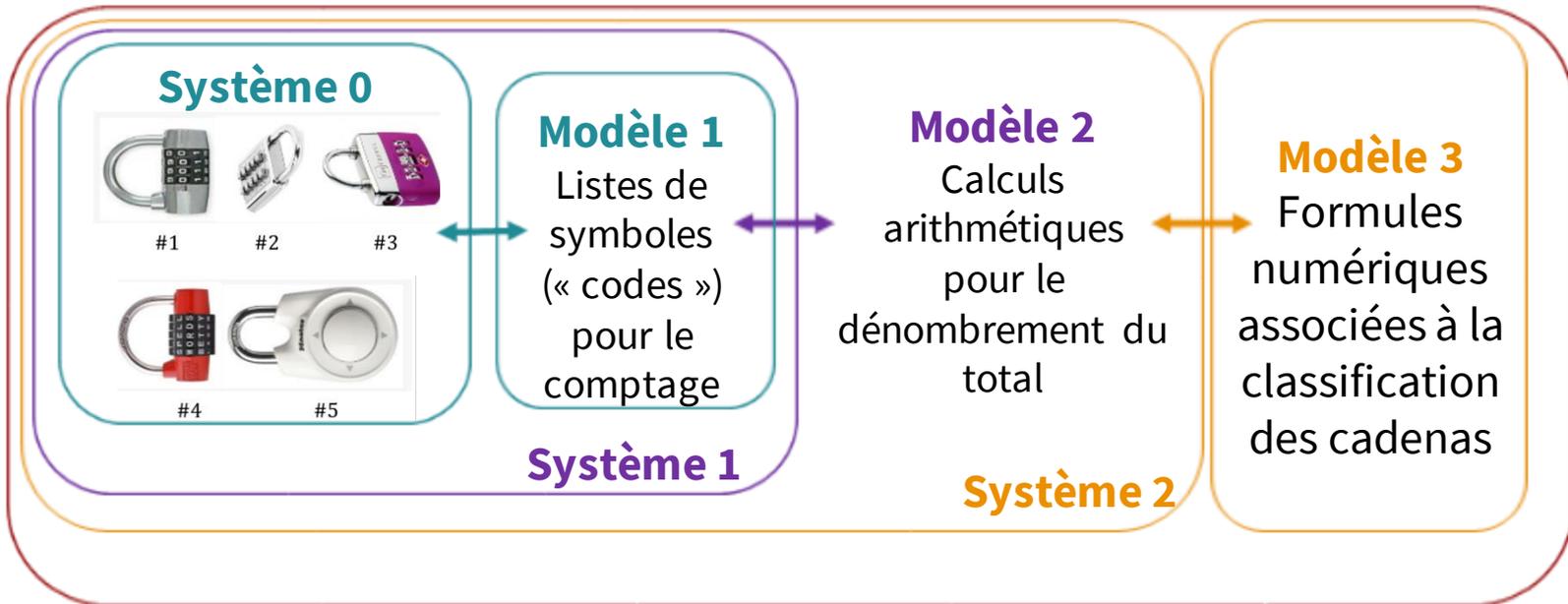
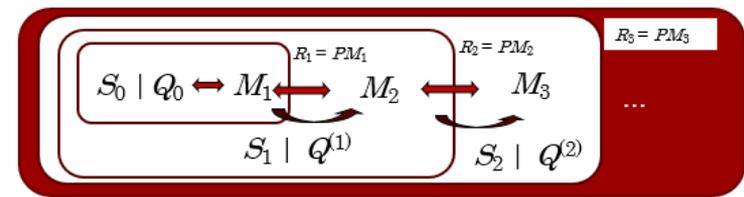
<p>All combinations allowed</p>	<ul style="list-style-type: none"> The order matters Elements can be repeated Variation with repetition: $VR_{n,m} = n^m$ 	$VR_{10,4} = 10^4$
<p>Only combinations without repeated elements</p>	<ul style="list-style-type: none"> The order matters Elements cannot be repeated Variation without repetition: $V_{n,m} = \frac{n!}{(n-m)!}$ 	$V_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!}$ $= 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$
<p>Only combinations without repeated elements and $n = m$</p>	<ul style="list-style-type: none"> Same case than before but with $n = m$ Permutation: $P_n = n!$ 	$P_4 = 4!$

$$n^m \quad n_1 n_2 n_3 n_4 n_5$$

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}$$

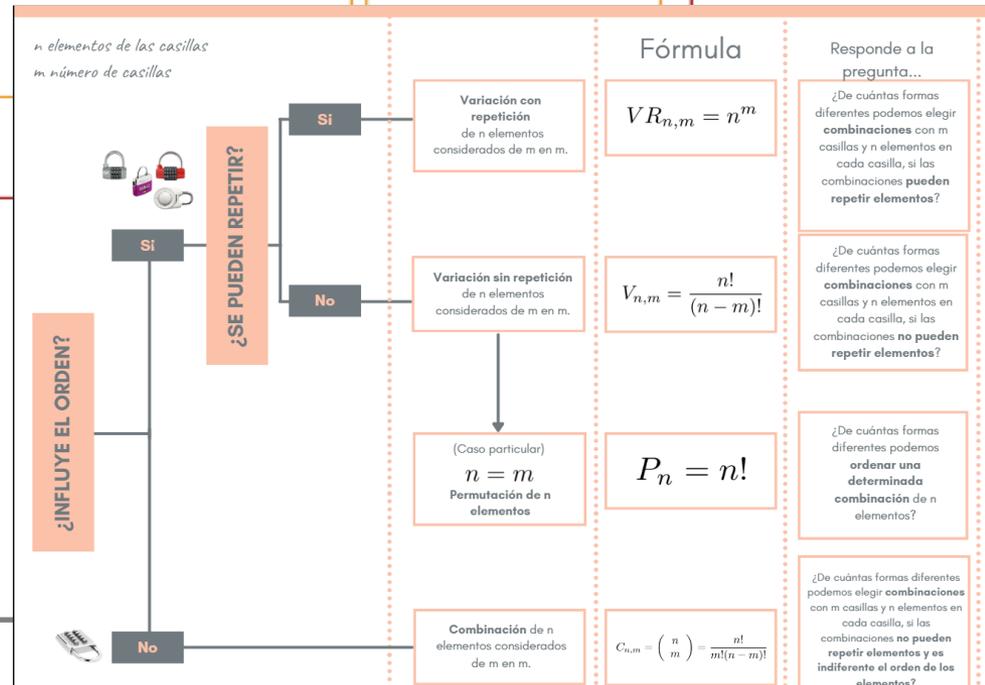
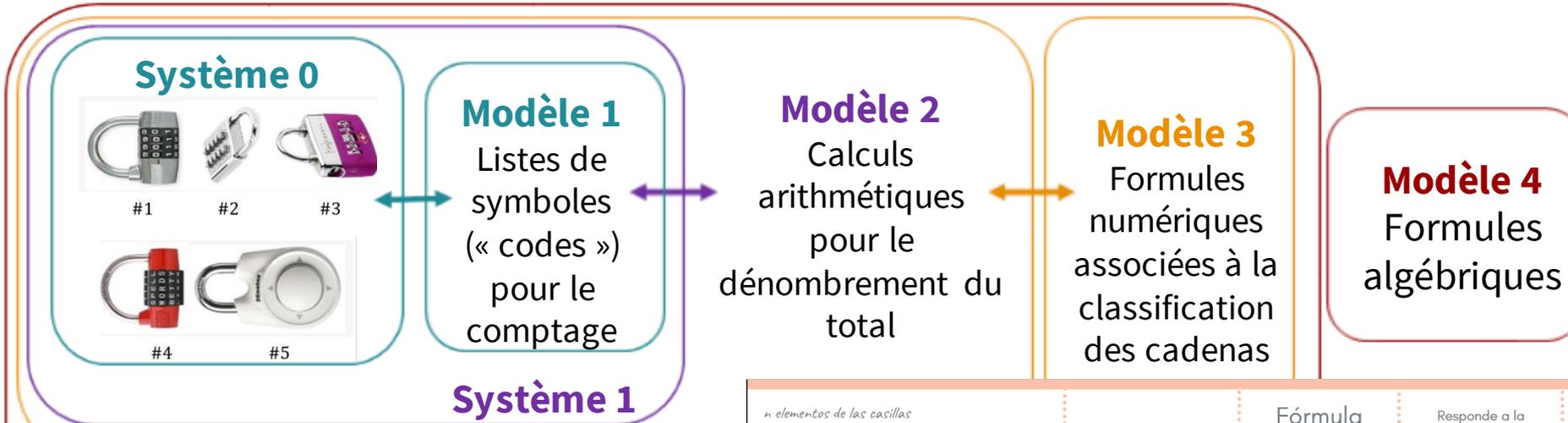
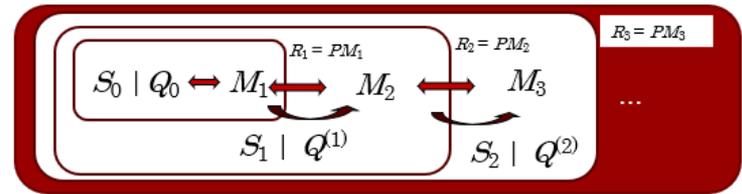
$$n!$$

EXEMPLE : La combinatoire dans une perspective de modélisation

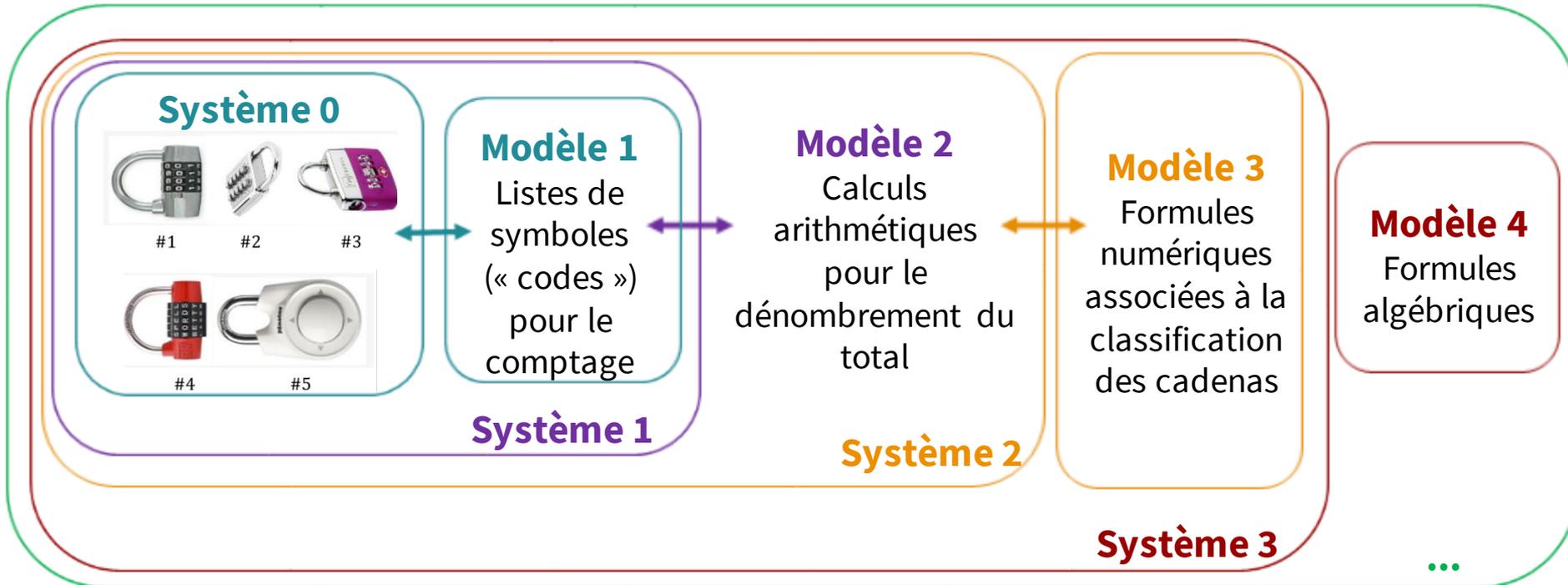
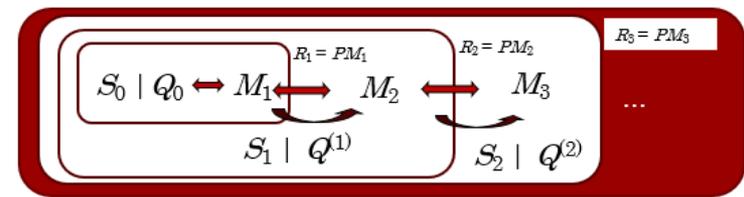


Q_3 Comment élaborer une technique générale pour trouver le nombre de combinaisons pour chaque cadenas ?

EXEMPLE : La combinatoire dans une perspective de modélisation



EXEMPLE : La combinatoire dans une perspective de modélisation



Construction de modèles successifs

RÉCURSIVITÉ

Chaque modèle vient enrichir le système initial qui est nouvellement modélisé

Structure des contenus

- ① La modélisation d'après la théorie anthropologique du didactique (TAD)
Exemple: Quel cadenas est plus sûr ?
- ② Pourquoi et comment enseigner la modélisation ? La modélisation dans le paradigme de questionnement du monde
Exemple : Un parcours d'étude et de recherche (PER) sur les cadenas
- ③ Formation des enseignants pour la modélisation : les PER-FE
Exemple : La boîte du pâtissier
- ④ Pour finir: des rapports complexes entre systèmes et modèles
Exemple : La ségrégation scolaire

2. Pourquoi et comment enseigner la modélisation ?

Paradigme de la « visite des œuvres »

Les programmes comme ensemble de réponses

Programme = { Questions ~~X~~, Réponses déjà établies }

Rôle secondaire de la modélisation



Paradigme du « questionnement du monde »

Le curriculum comme ensemble de questions et de possibles parcours pour enquêter sur ces questions

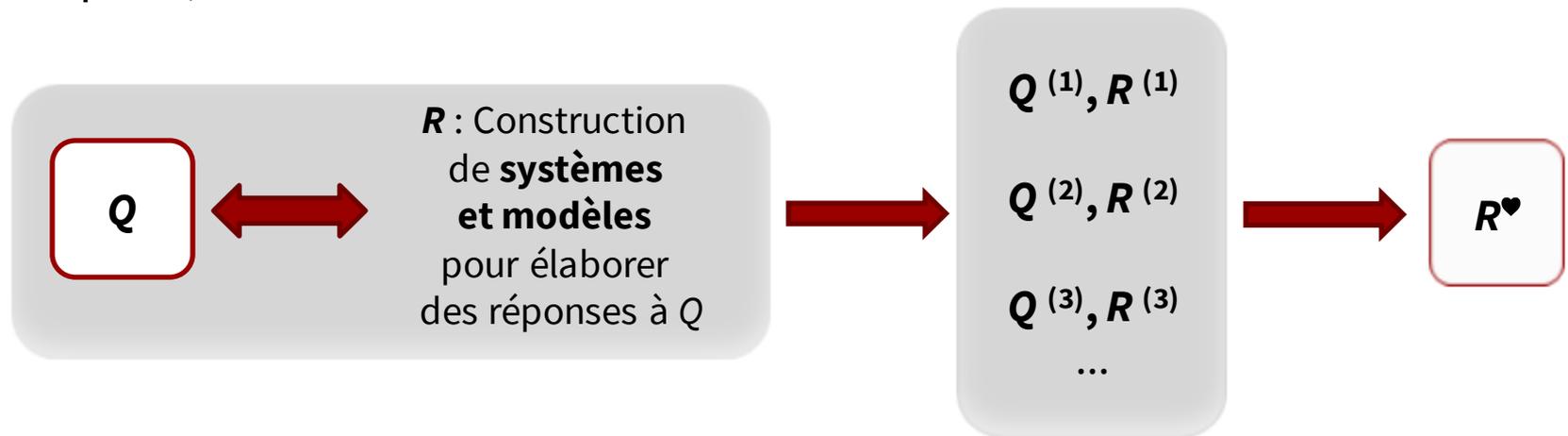
Programme = { Questions, Réponses à Q }

Rôle primordial de la modélisation ou de la mathématique comme outil de modélisation



2. Pourquoi et comment enseigner la modélisation ?

- Les processus d'enquête mettent en relief le **rôle primordial des questions**
- Ils situent la **modélisation** aussi bien dans l'élaboration de réponses aux questions que dans le soulèvement de nouvelles questions (dynamique de l'enquête)



Les **parcours d'étude et de recherche** (PER) comme modèle didactique pour la construction et analyse des processus de modélisation

1.PER : Une question génératrice Q_0 comme point de départ du PER. Son étude soulève de nouvelles questions dérivées issues de Q_0

4.PER : Nouvelles responsabilités, routines et dispositifs à partager entre les élèves et les enseignants.

Changement de **contrat didactique** pour l'étude collective de Q_0 et élaboration de la réponse finale R ♥

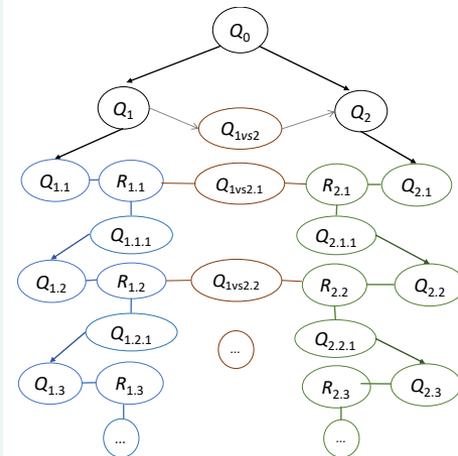
Parcours d'étude et de recherche (PER)

3.PER : La construction de réponses R_i a besoin de l'étude de réponses préexistantes dans des différents **médias** et de créer les moyens pour tester leur pertinence et validité
→ **Dialectique « média—milieux »**

2.PER : Structure « arborescente » de questions Q_i et réponses R_i

Cette ensemble de (Q_i, R_i) définit une « carte » des possibles parcours à suivre dans le PER

→ **Dialectique « questions-réponses »**



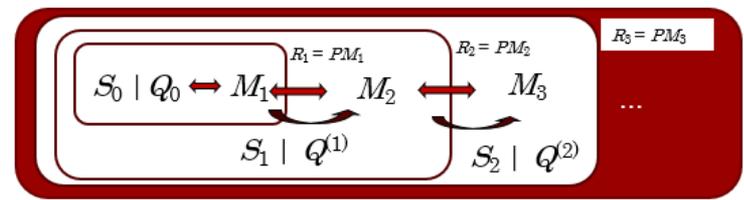
EXEMPLE : Quel cadenas est plus sûr ?



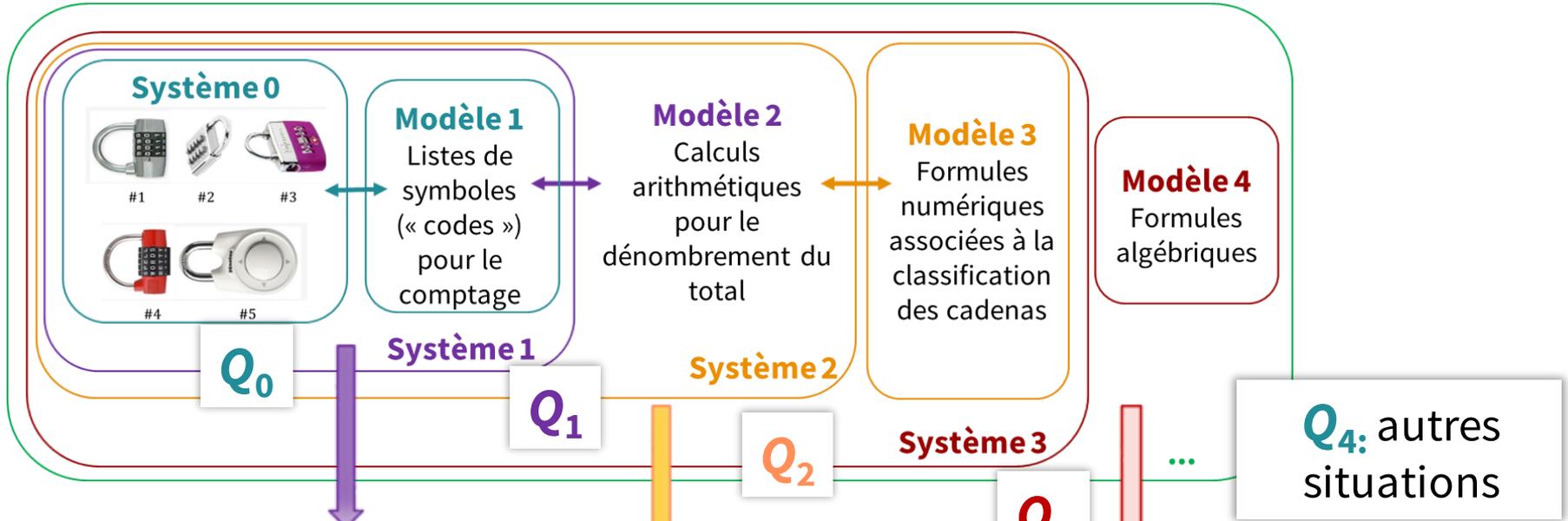
Vásquez (2019-23, thèse en cours)

Conditions de l'expérimentation

- Mise en œuvre **pendant 3 semaines** (2019/20, 2020/21, 2021/22 et 2022/23), dans le « Col·legi Natzaret » (Esplugues, Barcelone)
- **60 élèves de 2^e** (15-16 ans) distribués en **2-3 groupes classe**, avec **3 enseignants** qui changent de groupe-classe à chaque séance
- Les élèves travaillent en **petits groupes de 5-6** et doivent fournir après chaque séance un « **bilan d'étape** » par écrit chaque jour, un **rapport de groupe** à la fin du parcours, passer un **examen** et répondre à un **questionnaire individuel**
- La responsable du cours est une professeure avec expérience qui fait une thèse en didactique des mathématiques, les deux autres professeurs ne sont pas formés en didactique



EXEMPLE : Quel cadenas est plus sûr ?



- Limitations pour **valider** le résultat final
- Importance de la **dimension expérimentale**
- Besoin d'une **terminologique spécifique** : éléments, positions ou cellules, codes...

- Rôle du **codage** et du **comptage** pour la construction de formules numériques
- Identification **d'équivalences** entre cadenas

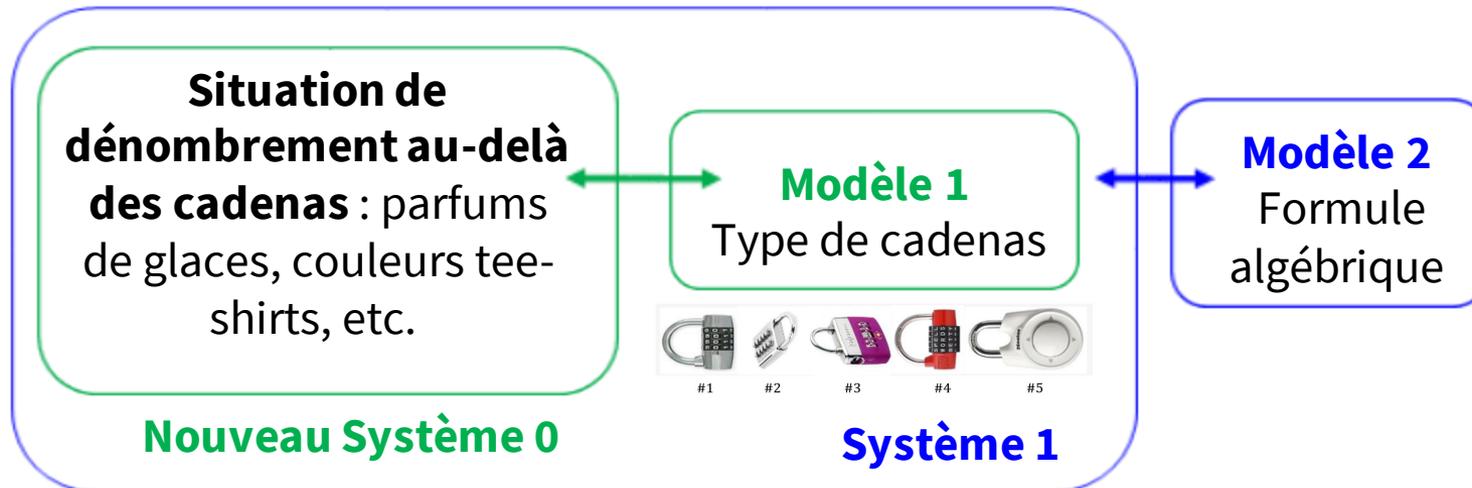
- **Formules algébriques** qui modélisent chaque « classe de cadenas »
- **Terminologie** propre à la combinatoire
- Rôle du **professeur**

Systeme

Modele

EXEMPLE : Quel cadenas est plus sûr ?

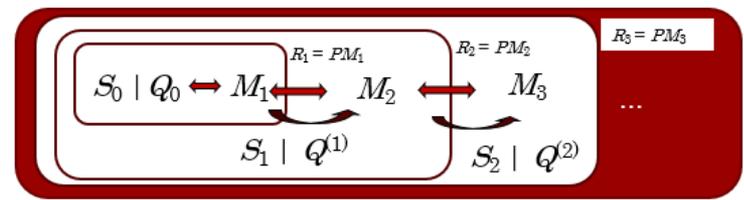
Q₀général : Combien de combinaisons dans différentes situations de comptage ?



RÉVERSIBILITÉ

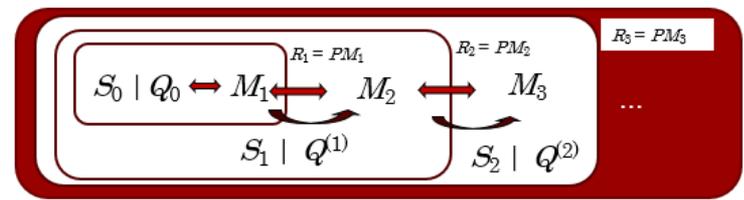
- Les élèves ont utilisé **les cadenas** pour étudier une variété de nouveaux systèmes (situations de comptage) proposés par les enseignants
- Les cadenas apparaissent comme des **modèles intermédiaires** entre le système — collection à compter — et la formule.

EXEMPLE : Quel cadenas est plus sûr ?



Planning et gestion du PER: rôle de la description a priori

DL.	DT.	DC.	DJ.	DV.
Q_0	18 ⁴ – Els mètodes de recompte QUIN CADENAT ÉS MILL...	19 ⁴ – Els mètodes de recompte QUIN CADENAT ÉS MILL...	20 ⁴ – Els mètodes de recompte	21 ⁴ – Els mètodes de recompte QUIN CADENAT ÉS MILL...
Q0: Quin cadenas és més segur? Q.0.1: Quin cadenas admet més codis?		Q_1	Q.1: Quants codis admet cada cadenas?	
24 ⁴ – Els mètodes de recompte QUIN CADENAT ÉS MILL...	25 ⁴ – Els mètodes de recompte QUIN CADENAT ÉS MILL...	26 ⁴ – Els mètodes de recompte QUIN CADENAT ÉS MILL...	27 ⁴ – Els mètodes de recompte	28 ⁴ – Els mètodes de recompte QUIN CADENAT ÉS MILL...
Q.1:	Q.2: Podem calcular el nombre de codis per a cada cadenas? Q_2	Q.3: Quina seria la resolució utilitzant aquest mètode? Q.3.1: Quines fórmules podem generar per a calcular el nombre de codis per a cada cadenas (amb o sense restriccions)? Q_3	de tots els cadenas segons el mètode de tots els cadenas segons el mètode	
31 ⁴ – Els mètodes de recompte QUIN CADENAT ÉS MILL...	1 ⁴ – Els mètodes de recompte QUIN CADENAT ÉS MILL...	2 ⁴ – Els mètodes de recompte QUIN CADENAT ÉS MILL...	3 ⁴ – Els mètodes de recompte	4 ⁴ – Els mètodes de recompte QUIN CADENAT ÉS MILL...
Masterclass				
Q.4: Funcionen aquestes fórmules per a poder resoldre més problemes amb contextos diferents a cadenas?		Q_4 : autres situations		



EXEMPLE : Quel cadenas est plus sûr ?

Construction et gestion du PER: rôle de la description a priori

Q0: Quin cadenas és més segur?
 Q.0.1: Quin cadenas admet més codis?
 Presentació de 5 cadenats. Deixar llibertat a cada grup d'intentar trobar la solució a la seva pregunta p
 Responsable resposta: Cada equip, al final del projecte

Q1: Quants codis admet cada cadenas?
 Q1.1: Quants codis admet el cadenas de numeració de ruleta?
 Q.1.1.1: Quines estratègies de recompte hem utilitzat per a trobar el nombre de codis
 Q.1.1.2: Si haguéssim de provar-les totes per a obrir el cadenas, quin temps màxim t
 Q1.2: Quants codis admet el cadenas pulsador?
 Q1.3: Quants codis admet el cadenas amb dates?
 Q1.4: Quants codis admet el cadenas de paraules?
 Q1.5: Quants codis admet el cadenas direccional?
 Responsable resposta: Cada equip, el seu cadenas
 Cada grup exposa la seva resposta (pel seu cadenas) i els seus arguments. Les respostes no les val
 Cada grup elabora la seva resposta (per a tots els cadenats) al seu dossier de treball

Q2: Podem trobar el nombre total de codis per a qualsevol cadenas?
 Q2.1: Quants codis admet el cadenas de numeració de ruleta **modificar**?
 Q2.2: Quants codis admet el cadenas pulsador **modificar**?
 Q2.3: Quants codis admet el cadenas amb dates **modificar**?
 Q2.5: Quants codis admet el cadenas direccional **modificar**?
 Responsable resposta: Cada equip, tots els cadenats
 Cada grup elabora la seva resposta (per a tots els cadenats) al seu dossier de treball

Q3: Quina seria la classificació de tots els cadenats segons el mètode resolució utilitzat per a calcular e
 Responsable resposta: Cada equip
 Cada grup elabora la seva classificació, al dossier de treball
 Q.3.1: Quines fórmules model podem generar per a calcular el nombre de codis per a qualsev
 Responsable resposta: Professors
 Masterclass

Q4: Funcionen aquestes fórmules per a poder resoldre més problemes amb contextos diferents a cadenats?
 Exercici de combinatòria.
 Test individual

Q0: Quin cadenas és més segur?
 Q.0.1: Quin cadenas admet més codis?
 Presentació de 5 cadenats. Deixar llibertat a cada grup d'intenta
 Responsable resposta: Cada equip, al final del projecte

Q1: Quants codis admet cada cadenas?
 Q1.1: Quants codis admet el cadenas de numeració de
 Q.1.1.1: Quines estratègies de recompte hem
 Q.1.1.2: Si haguéssim de provar-les totes per
 Q1.2: Quants codis admet el cadenas pulsador?
 Q1.3: Quants codis admet el cadenas amb dates?
 Q1.4: Quants codis admet el cadenas de paraules?
 Q1.5: Quants codis admet el cadenas direccional?

Gestion de l'équipe de professeurs

Q0: Quin cademat és més segur?



Q1: Quants codis diferents admet cada cademat?
Pengeu aquí la vostra presentació

1 Cadenat de numeració de ruleta
Es pot triar qualsevol combinació de 4 números

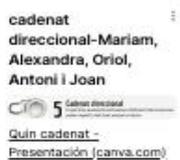
2 Cadenat pulsador
Es pot triar qualsevol combinació de 3 dígits i pulsar els números corresponents 10000

3 Cadenat amb dates
Es pot triar qualsevol data amb el format DD-MES-AA

4 Cadenat de paraules
Es pot triar qualsevol combinació amb 5 lletres amb les lletres disponibles

5 Cadenat direccional
Es pot triar qualsevol combinació utilitzant 3 direccions (D, Dreta, esquerra i Dalt, baix, esquerra i dreta)

6 Cadenat de caixa forta
Es pot triar qualsevol combinació utilitzant 3 números. Les dígits no es poden repetir.



Carte questions-réponses élaborée avec les étudiants

Structure des contenus

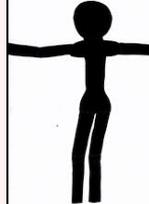
- ① La modélisation d'après la théorie anthropologique du didactique (TAD)
Exemple : Quel cadenas est plus sûr ?
- ② Pourquoi et comment enseigner la modélisation ? La modélisation dans le paradigme de questionnement du monde
Exemple : Un parcours d'étude et de recherche (PER) sur les cadenas
- ③ Formation des enseignants pour la modélisation : les PER-FE
Exemple : La boîte du pâtissier
- ④ Pour finir : des rapports complexes entre systèmes et modèles
Exemple : La ségrégation scolaire

3. Formation des enseignants pour la modélisation

Hypothèse de recherche sur les *Parcours d'Étude et de Recherche*

Les PER (Chevallard, 2005, 2006 et 2015) apparaissent comme des dispositifs d'enseignement pour :

- Dépasser divers phénomènes didactiques liés au **paradigme de la « visite des œuvres »**
- Créer et étudier les **conditions qui favorisent et les contraintes qui empêchent** la mise en œuvre, la gestion et la diffusion de pratiques d'enquête (qui intègrent la modélisation)



Hypothèse de recherche sur les *PER pour la formation des enseignantes*

Les PER-FE (Ruiz-Olarría, 2015; Barquero et al., 2018) apparaissent comme des dispositifs pour la formation des enseignantes pour :

- Aborder des **problèmes ou questions de la profession** (Cirade, 2006) qui émergent de la pratique des enseignants
- Introduire des outils didactiques pour étudier et élaborer des réponses (provisoires) à ces **problèmes de la profession**

3. Formation des enseignants pour la modélisation

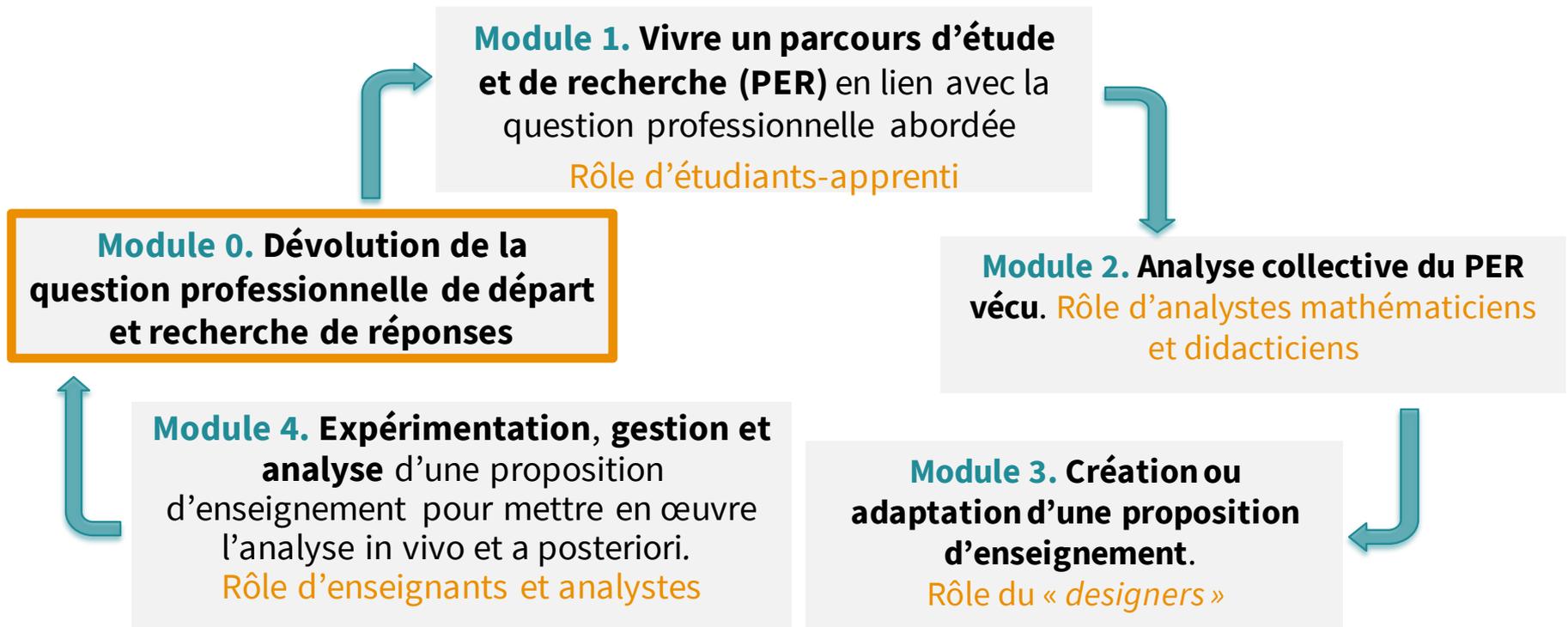
Question de la profession: Comment enseigner la « compétence modéliser » ?

Hypothèse de recherche : Les **Parcours d'Étude et de Recherche pour la Formation des Enseignants** (PER-FE) sont proposés comme un dispositif de formation qui peut favoriser :

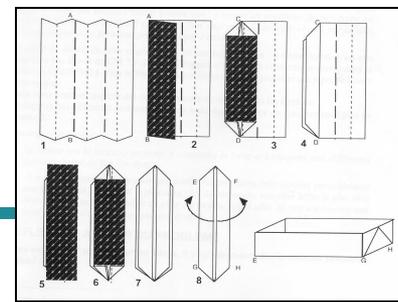
- **Créer des conditions** pour aborder le problème de façon conjointe formateurs et (futurs) enseignants
- **Transposer les outils de la recherche à la pratique des enseignements** et **cocréer de nouveaux outils** pour l'analyse épistémologique et didactique
- Initier l'identification et caractérisation des **contraintes institutionnelles qui empêchent la mise en œuvre, l'intégration et la diffusion des pratiques de modélisation** (Barquero et al., 2018)

3. Formation des enseignants pour la modélisation

Adaptation de la structure générale du PER pour la formation des enseignants (Ruiz-Olarría, 2015)



EXEMPLE : Un PER-FE sur la modélisation



Université de Barcelone (2011/12 - actualité)

Barquero, Bosch & Wozniak (2019, 2023), Barquero, Bosch & Florensa (2022), Barquero (2023)

Comment introduire la modélisation dans l'enseignement à l'école primaire ? À travers quelles activités ? Quel discours partagé sur la modélisation doit être développé ?

Conditions de l'expérimentation

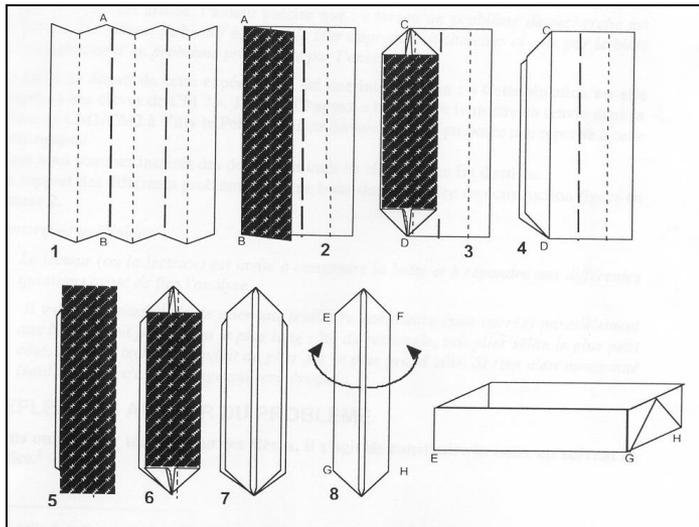
- Formation des enseignants de **premier degré** à l'Université de Barcelone
- Intégré à un cours obligatoire appelé « Didactique des mathématiques II » avec des étudiants de **4e année** (dernière année de formation initiale à l'université)
- 7-8 rencontres de 2h avec un groupe de 50 étudiants
- Il a été conçu à partir de la proposition de **parcours d'étude et de recherche pour la formation des enseignants** (PER-FE), modules 0, 1, 2 et 3.

EXEMPLE : Un PER-FE sur la modélisation

MODULE 1 – Vivre un PER en lien avec la Q professionnelle abordée

Rôle des participants : Rôle d'étudiants-apprenti. Dans la salle de classe, il y avait des étudiants avec le rôle d'observateurs et de rapporteur.

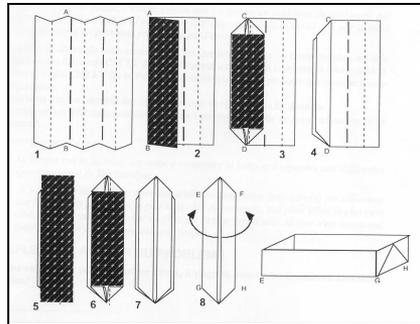
Objectif : Étudier la situation de modélisation et rédiger un rapport qui décrive les questions qu'ils se sont posées et les réponses qu'ils y ont apportées.



Q_0 : Comment construire des boîtes pour aider la pâtissière à emballer la variété de gâteaux qu'elle propose ? Quelle relation existe-t-il entre les dimensions du matériau initial (papier ou carton) et les dimensions de la boîte obtenue ?
Chappaz & Michon (2003), Ruiz-Higuera (2008)

EXEMPLE : Un PER-FE sur la modélisation

Systeme initial S0



Q₀ Comment pouvons-nous construire des boîtes ? Quelles relations ?

M1 Modèle empirique-mesure

D'un foli Din-A4: 10,5 cm x 10,5 cm x 5 cm



D'un foli Din-A5:

1. 16 cm x 5 cm x 2,7 cm

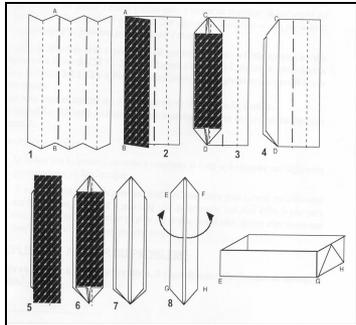


		Com canvia la mida de la caixa segons l'orientació del full	
		Horizontal	Vertical
Com canvia la mida de la caixa segons el full utilitzat	Caixa Din-A4	11 cm x 10 cm x 5 cm	22 cm x 7'5 cm x 3'5 cm
	Caixa ½ Din-A4	8 cm x 7 cm x 3'5 cm	15'5 cm x 5'25 cm x 2'5 cm
	Caixa ¼ Dina-A4	5,5 cm x 5 cm x 2'5 cm	11 cm x 3'5 cm x 2 cm
	Cartolina	27'6 cm x 22'5 cm x 10'8 cm	
	Targeta	5 cm x 5 cm x 2 cm	10'4 cm x 3'5 cm x 1'5 cm

Q₁ Quelles sont les dimensions d'une boîte issue d'un papier dont les dimensions sont connues ? Si on prend la moitié d'une feuille, obtient-on une boîte dont les mesures sont la moitié de la boîte précédente ? Avec une feuille carrée, est-ce qu'on obtient une boîte à fond carré ? [...]

EXEMPLE : Un PER-FE sur la modélisation

Système initial S0



Q₀ Comment pouvons-nous construire des boîtes ? Quelles relations ?

M1 Modèle empirique-mesure

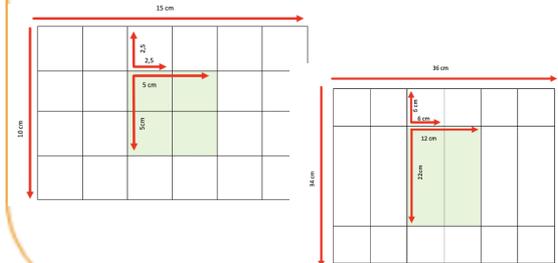
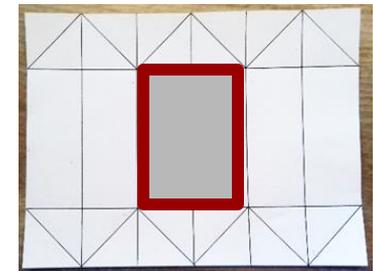
D'un foli Din-A4: 10,5 cm x 10,5 cm x 5 cm



Com canvia la mida de la caixa segons el full utilitzat	Caixa Din-A4	Com canvia la mida de la caixa segons l'orientació del full	
		Horizontal	Vertical
	Caixa Din-A4	11 cm x 10 cm x 5 cm	22 cm x 7'5 cm x 3'5 cm
	Caixa ½ Din-A4	8 cm x 7 cm x 3'5 cm	15'5 cm x 5'25 cm x 2'5 cm
	Caixa ¼ Dina-A4	5,5 cm x 5 cm x 2'5 cm	11 cm x 3'5 cm x 2 cm
	Cartolina	27'6 cm x 22'5 cm x 10'8 cm	
	Targeta	5 cm x 5 cm x 2 cm	10'4 cm x 3'5 cm x 1'5 cm

Système 1

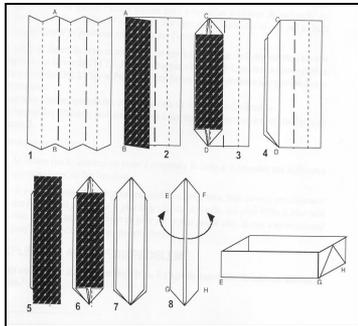
M2 Modèle géométrique et recherche relations entre les longueurs



Q₂ Quelles sont les **dimensions des feuilles** dont nous avons besoin pour construire **une boîte à dimensions données** ?

EXEMPLE : Un PER-FE sur la modélisation

Système S0



Q₀ Comment pouvons-nous construire des boîtes ? Quelles relations ?

M1 Modèle empirique-mesure

D'un folli Din-A4: 10,5 cm x 10,5 cm x 5 cm



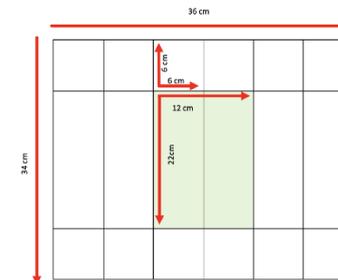
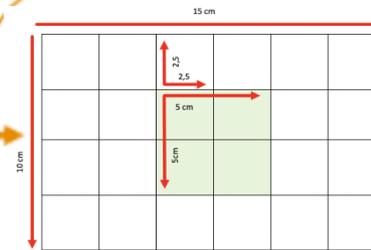
D'un folli Din-A5:

1. 16 cm x 5 cm x 2,7 cm



Système 1

M2 Modèle géométrico-numérique



Système 2

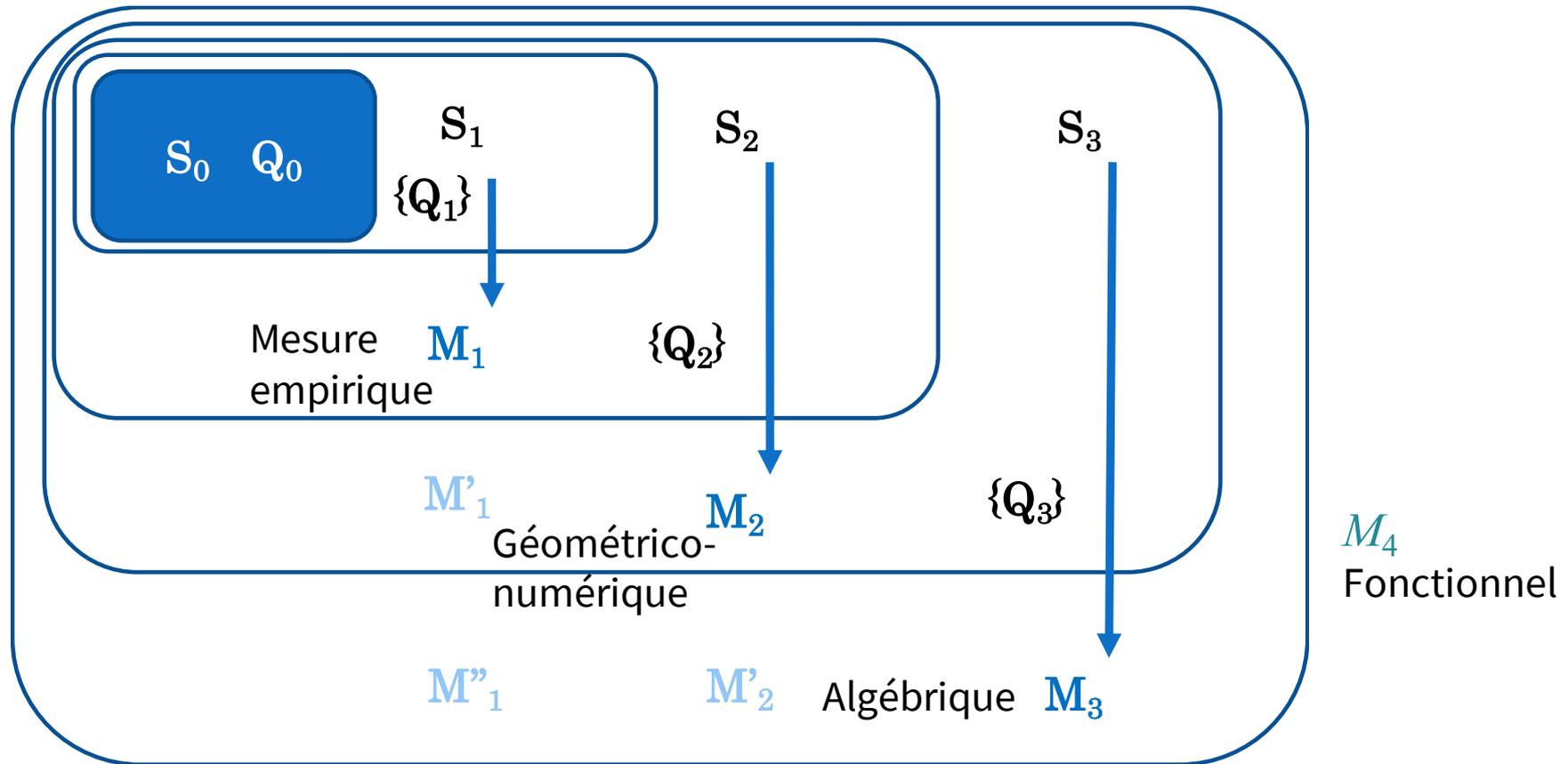
M2'
Modèle géométrico-algébrique

Modèle 3
Modèle algébrique

Modèle 4
Modèle fonctionnel

Q₃: Quelle boîte peut-on fabriquer avec une feuille de dimensions données ? Quelle feuille doit-on prévoir pour obtenir une boîte de dimensions données ? *Pas besoin de construire la boîte.*

EXEMPLE : Un PER-FE sur la modélisation

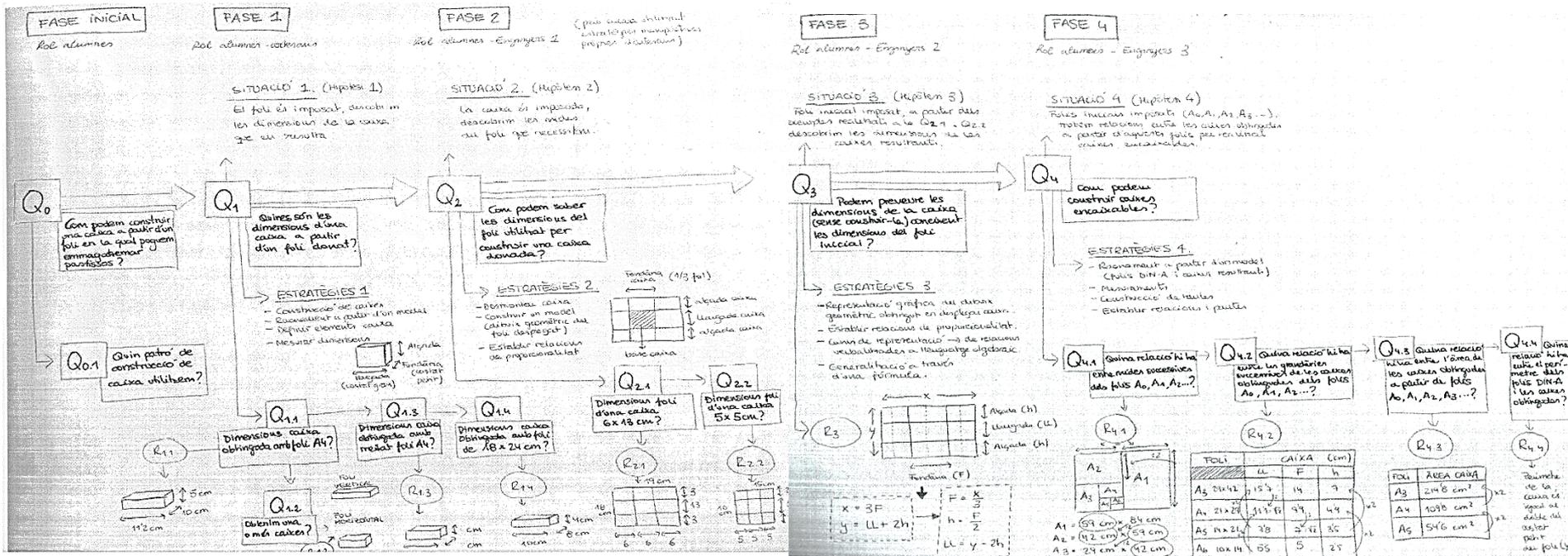


Atelier à la 21e école d'Été de Didactique des Mathématiques

Wozniak, Barquero, Bosch, et Kaspary (2021)

EXEMPLE : Un PER-FE sur la modélisation

MODULE 2 - Analyser le PER tel qu'il a été vécu

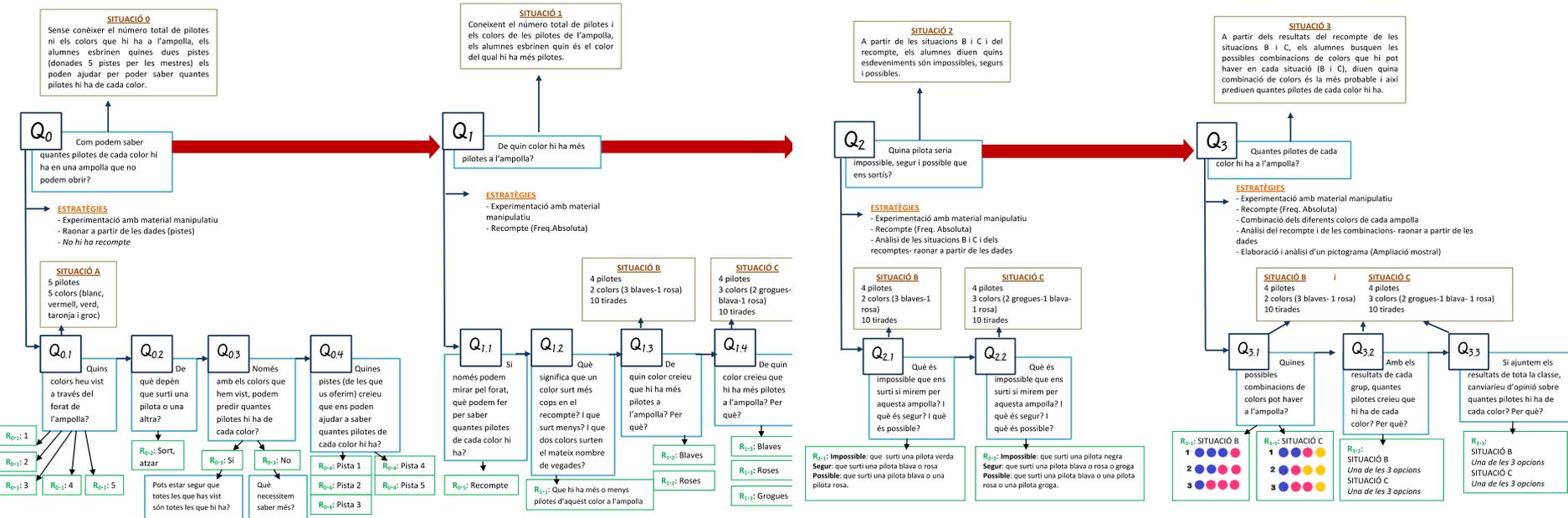


EXEMPLE : Un PER-FE sur la modélisation

MODULE 3. Création ou adaptation d'une proposition d'enseignement

Rôle des participants : créateurs de situations didactiques

A2-Recorregut d'Estudi i Investigació per a Cicle Inicial



3. Formation des enseignants pour la modélisation

Question de la profession: Comment enseigner la « compétence modéliser » ?

Objectif des PER-FE : besoins épistémologiques

1. Praxis mathématique :

- Vivre des processus de modélisation
- Prendre la question au sérieux et y apporter une réponse

2. Logos mathématique : élaborer avec les enseignants une conceptualisation (et des « mots ») pour que les praxéologies de modélisation ne soient plus « muettes » :

- Éléments et étapes du processus de modélisation en général
- Éléments et étapes de chaque processus de modélisation particulier (donner des noms aux modèles, aux systèmes, aux questions, etc.)

Qu'est-ce que la modélisation ou la compétence « modéliser » ?

... comme objet à enseigner (et à apprendre)

... comme activité scientifique
... pour analyser, concevoir, gérer, développer son enseignement

→ Construction collective à faire et à partager, discuter, renouveler

Besoins épistémologiques

Comment enseigner la modélisation ou la compétence « modéliser » ?

... au Primaire, Collège, Lycée, Université

... en formation d'enseignants

→ Construction collective de dispositifs et infrastructures pour l'enseignement à partager, discuter, renouveler

Besoins didactiques



3. Formation des enseignants pour la modélisation

Question de la profession: Comment enseigner la « compétence modéliser » ?

Objectif des PER-FE : analyse et gestion didactique

1. Praxis didactique : élaborer des dispositifs d'enseignement

- Structure et gestion des PER
- Cartes de questions-réponse et analyse a priori, in vivo et a posteriori

Qu'est-ce que la modélisation ou la compétence « modéliser » ?
... comme objet à enseigner (et à apprendre)
... comme activité scientifique
... pour analyser, concevoir, gérer, développer son enseignement
→ Construction collective à faire et à partager, discuter, renouveler

Besoins épistémologiques



Comment enseigner la modélisation ou la compétence « modéliser » ?
... au Primaire, Collège, Lycée, Université
... en formation d'enseignants

→ Construction collective de dispositifs et infrastructures pour l'enseignement à partager, discuter, renouveler

Besoins didactiques

2. Logos didactique : cocréation d'outils pour l'analyse didactique

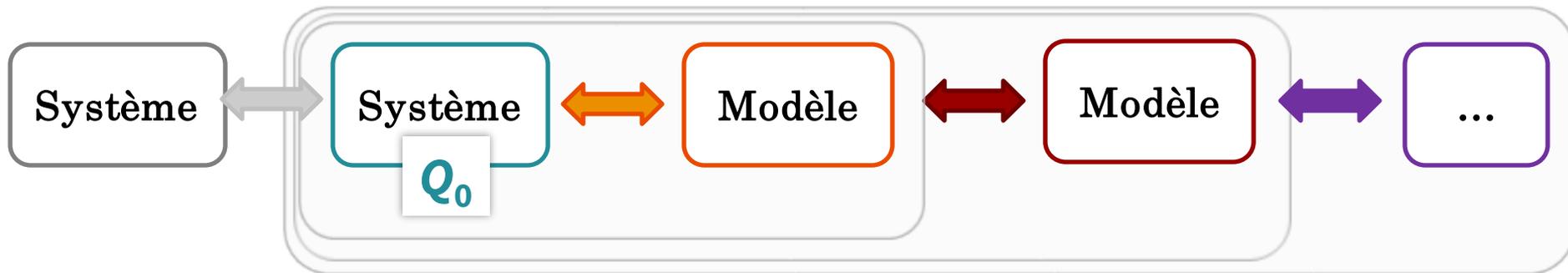
- Importance du processus et des réponses apportées, pas uniquement des modèles construits et des théories ou concepts qui les soutiennent (questionnement du monde vs. visite des œuvres)
- Importance de l'évolution du milieu (système) comme outil de validation et de questionnement
- Réflexion sur les contraintes issues du paradigme dominant

Structure des contenus

- ① La modélisation d'après la théorie anthropologique du didactique (TAD)
Exemple : Quel cadenas est plus sûr ?
- ② Pourquoi et comment enseigner la modélisation? La modélisation dans le paradigme de questionnement du monde
Exemple : Un parcours d'étude et de recherche (PER) sur les cadenas
- ③ Formation des enseignants pour la modélisation : les PER-FE
Exemple : La boîte du pâtissier
- ④ Pour finir : des rapports complexes entre systèmes et modèles
Exemple : La ségrégation scolaire

4. Pour finir : des rapports complexes entre systèmes et modèles

COMPLEXITÉS DU PROCESSUS DE MODÉLISATION



RÉVERSIBILITÉ

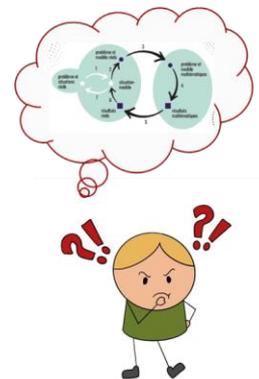
RÉCURSIVITÉ

PARADIGME DU QUESTIONNEMENT DU MONDE

Questions sur
le système

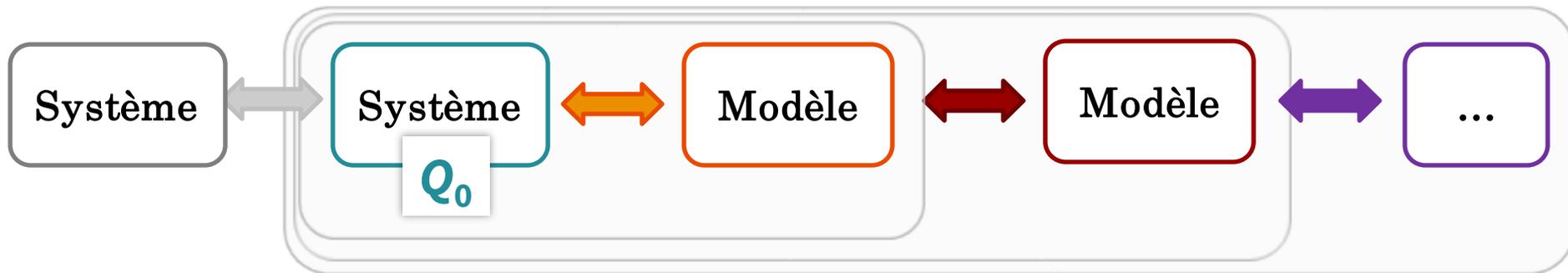
Questions sur
les modèles

Questions sur les rapports
système-modèle



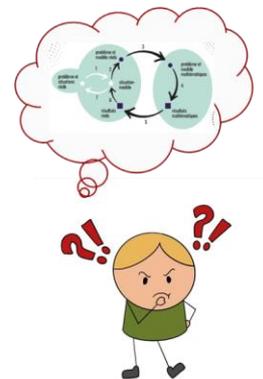
4. Pour finir : des rapports complexes entre systèmes et modèles

COMPLEXITÉS DU PROCESSUS DE MODÉLISATION



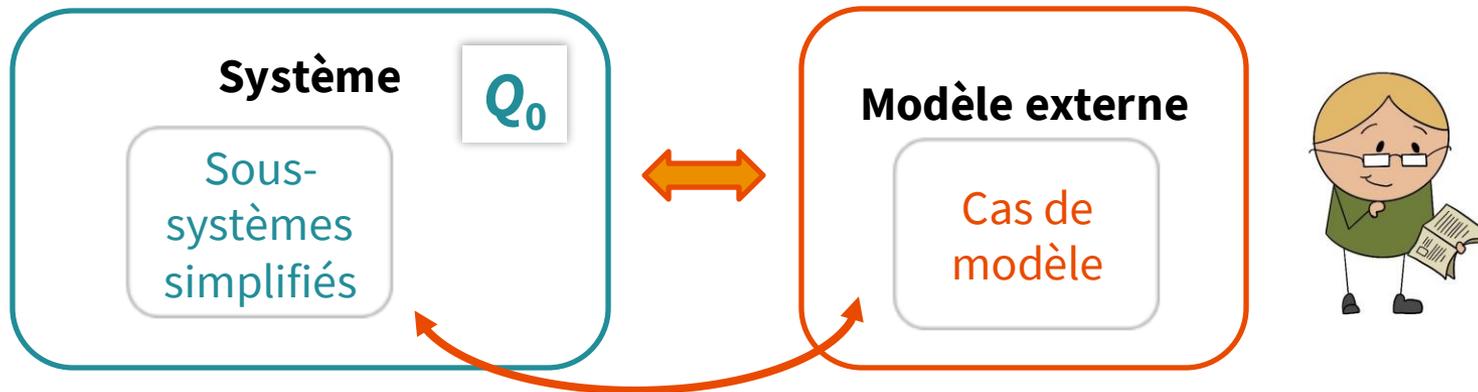
Les modèles se construisent mais parfois on les **trouve** « **tout faits** » et on les **étudie** pour pouvoir les utiliser:

- Identification du modèle
- Étude/appropriation du modèle
- Mise à l'épreuve avec le système
- Travail du modèle
- Élaboration de réponses



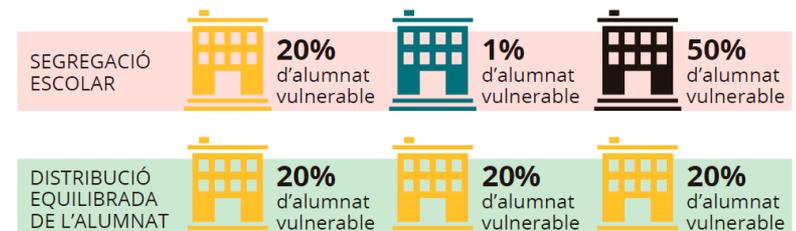
4. Pour finir : des rapports complexes entre systèmes et modèles

UN NOUVEAU CAS D'ÉTUDE

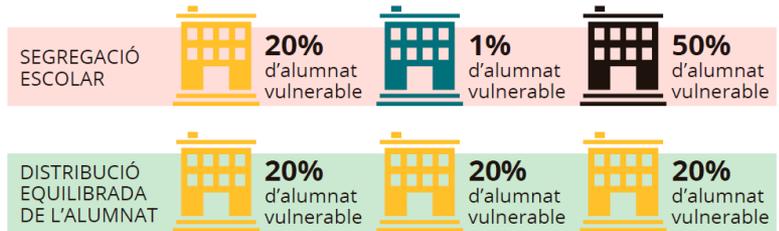


Les modèles se construisent mais parfois on les **trouve** « **tout faits** » et on les **étudie** pour pouvoir les utiliser:

- Identification du modèle
- **Étude/appropriation du modèle**
- **Mise à l'épreuve avec le système**
- Travail du modèle
- Élaboration de réponses



EXEMPLE : La ségrégation scolaire



La **ségrégation escolar** est un état et un processus de séparation physique, sociale, et symbolique de populations d'élèves en fonction de caractéristiques qui relèvent soit des populations elles-mêmes, soit des contextes locaux.



On votes el 28M? 590.000 persones votaran en una escola segregada

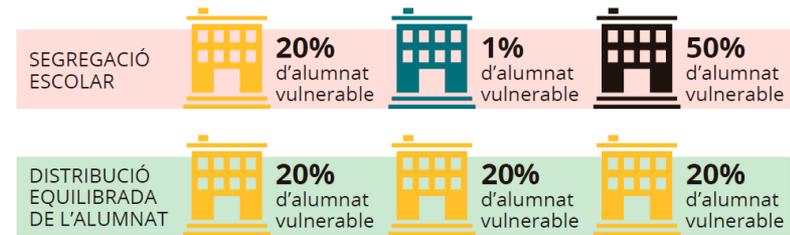
$$D = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left| \frac{x_i}{X} - \frac{y_i}{Y} \right| \quad 0 \leq D \leq 1$$

FÒRMULA DE DISSIMILITUD:

$$D = \frac{1}{2} \sum \text{esc valor abs} \left[\frac{\text{estr (escola)}}{\text{estr (municipi)}} - \frac{\text{esp (escola)}}{\text{esp (municipi)}} \right]$$



EXEMPLE : La ségrégation scolaire



Université de Barcelone (2022/23)

[À partir d'un rapport sur l'évolution de la ségrégation scolaire en Catalogne]

Qu'est-ce que la ségrégation scolaire ? Comment la mesure-t-on ?

Que veut dire qu'une municipalité a une ségrégation scolaire de 0,45 ou 0,12 ? D'où sortent ces nombres ? Comment les interpréter ?

Conditions de l'expérimentation

- Formation des futurs enseignants du **premier degré** à l'Université de Barcelone
- Intégré à un cours obligatoire appelé « Raisonement et activité mathématique au Primaire » avec des étudiants de 2e année (d'un total de 4 ans d'étude)
- 3 séances de 2h avec un groupe de 45 étudiants
- Il a été conçu comme un **parcours d'étude et de recherche** pour le premier thème du cours: « Penser les mathématiques ».

EXEMPLE : la ségrégation scolaire

MODÈLE UTILISÉ PAR LE GOUVERNEMENT CATALAN

- *Indice de dissimilitude* (pour i écoles d'une municipalité m)

$$D = \frac{1}{2} \sum \left| \frac{V_i}{V_m} - \frac{nV_i}{nV_m} \right|$$

V_i : nombre d'élèves vulnérables dans l'école i

nV_i : nombre d'élèves non vulnérables dans i

V_m : nombre d'élèves vulnérables dans la municipalité

- QUESTIONS

- Comment calculer D ?
- Pourquoi D mesure la ségrégation ?
- Quelles sont les valeurs extrêmes ? À quel cas correspondent-elles ?
- Comment interpréter la valeur de D ?

On invente des cas simples pour répondre aux questions

EXEMPLE : la ségrégation scolaire

Pour étudier le modèle et répondre aux questions, les étudiants inventent des cas d'étude (sous-systèmes « idéaux »)

	TM	VM	TE1	VE1	TE2	VE2	TE3	VE3
Àurea ex1	30000	15000	15000	5000	15000	5000	15000	5000
Àurea ex2	30000	1200		4000		4000		4000
2 π	675		225	20%	225	30%	225	50%
Badamates			250	180	280	110		
Calculators	66707	5441	450	36	300	24	264	36
Pitàgores ex1	1000	36	275	8	420	25	305	3
Pitàgores ex2	1000	36	275	10	420	15	305	11
G6	550		150	15	100	20	300	15
G10	610	180	250	50	160	40	300	90
Hipatia ex1	120	24	40	22	40	1	40	1
Hipatia ex2	120	24	40	9	40	7	40	8
Hipatia ex3	120	24	40	8	40	8	40	8

EXEMPLE : la ségrégation scolaire

Exemple de cas d'étude

$$D = \frac{1}{2} \sum \left| \frac{V_i}{V_m} - \frac{nV_i}{nV_m} \right|$$

Élèves	Total	V	nV
École 1	250	50	200
École 2	160	40	120
École 3	300	90	210
Municip.	710	180	530

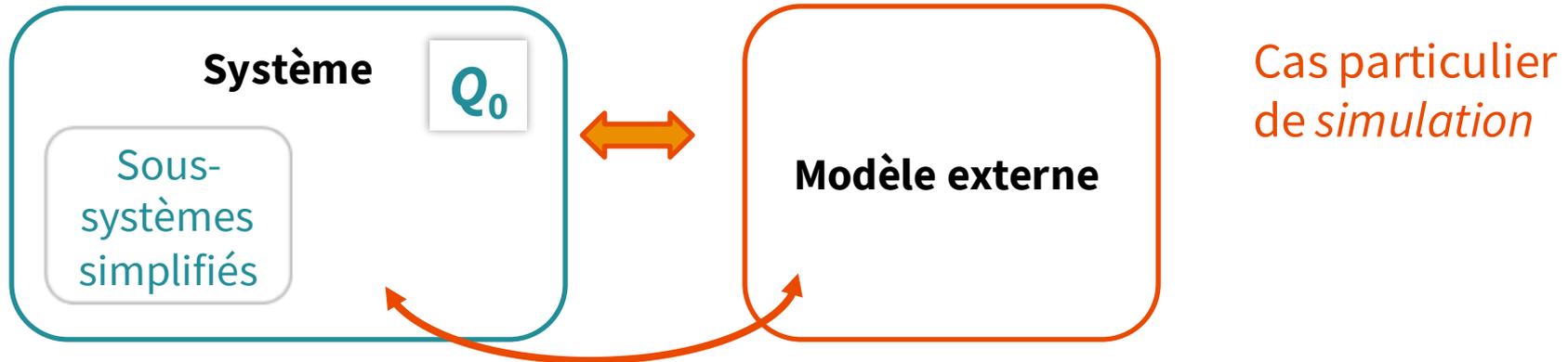
Pourcentages sur le total de vulnérables ou non-vulnérables

Élèves	Total	V	noV	Différence
École 1	250	28%	38%	-10%
École 2	160	22%	23%	-1%
École 3	300	50%	40%	10%
Municip.	710	100%	100%	

$$\begin{aligned}
 D &= \frac{1}{2} (10\% + 1\% + 10\%) \\
 &= \frac{1}{2} (21\%) = 10.5\%
 \end{aligned}$$

4. Pour finir : des rapports complexes entre systèmes et modèles

Interprétation 1 : on « simule » des sous-systèmes simples



Élèves	Total	V	nV
École 1	250	50	200
École 2	160	40	120
École 3	300	90	210
Municip.	710	180	530

Questions sur le système

$$D = \frac{1}{2} \sum \left| \frac{V_i}{V_m} - \frac{nV_i}{nV_m} \right|$$

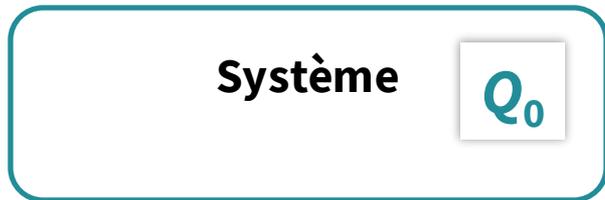
Questions sur le modèle

$$D = 10.5\%$$

Questions sur le rapport système-modèle

4. Pour finir : des rapports complexes entre systèmes et modèles

Interprétation 2 : la formule comme système à étudier



Cas particulier
de *simulation*

$$D = \frac{1}{2} \sum \left| \frac{V_i}{V_m} - \frac{nV_i}{nV_m} \right|$$

Questions sur le système
(équation)

Questions sur le rapport
système-modèle

Élèves	Total	V	nV
École 1	250	50	200
École 2	160	40	120
École 3	300	90	210
Municip.	710	180	530

$D = 10.5\%$

Élèves	Total	V	nV
École 1	250	63	187
École 2	160	41	119
École 3	300	76	224
Municip.	710	180	530

$D = 0\%$

Questions
sur les
modèles

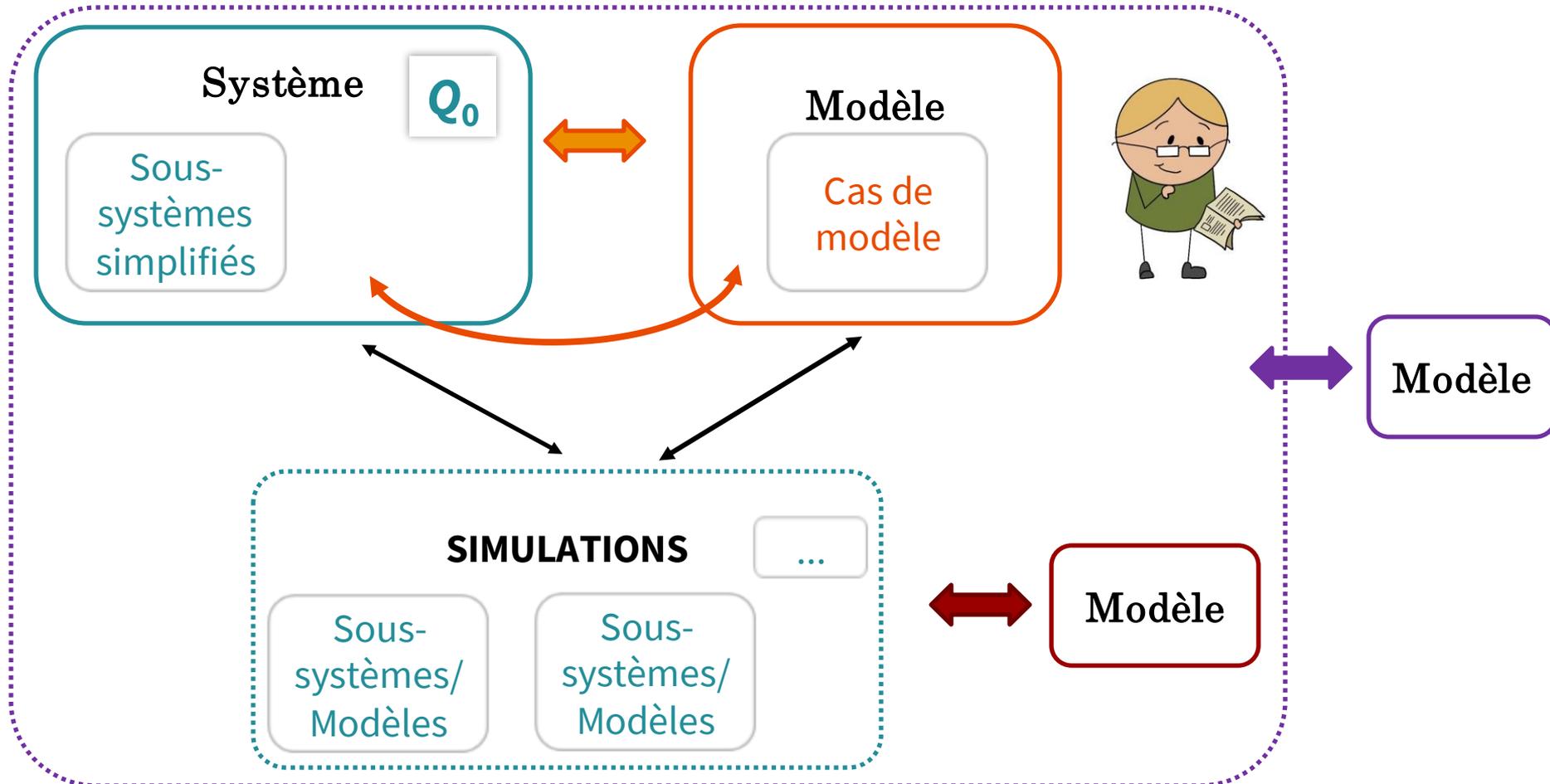
Élèves	Total	V	nV
École 1	250	10	240
École 2	160	160	0
École 3	300	10	290
Municip.	710	180	530

$D = 89\%$

4. Pour finir : des rapports complexes entre systèmes et modèles

MODÉLISATION ET SIMULATION

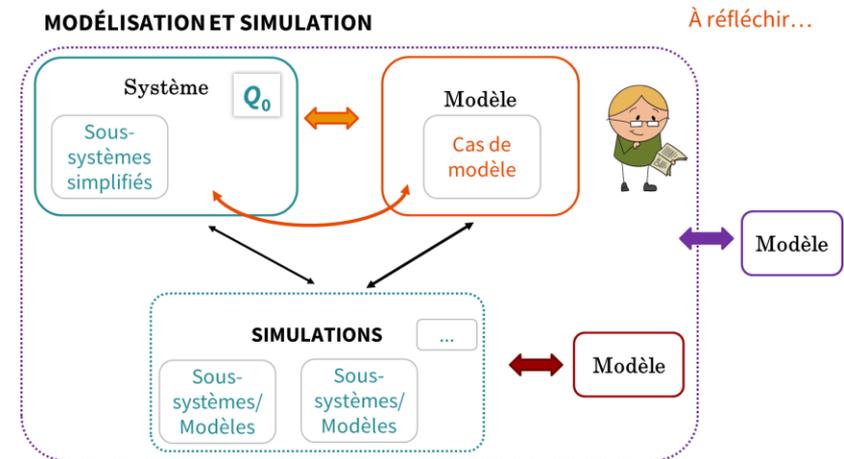
À réfléchir...



4. Pour finir : des rapports complexes entre systèmes et modèles

MODÉLISATION ET SIMULATION

- La pratique de créer des « sous-systèmes » simplifiés est classique, aussi dans l'enseignement. Sauf que les élèves n'y participent pas...
 - La « simulation » est toujours à la charge de l'enseignant ou du système d'enseignement.
 - La création de sous-systèmes comme milieu empirique de l'étude reste invisible.
- *Les problèmes arithmétiques sont un bon exemple à ce propos.*



Il est important de se donner des modèles didactiques suffisamment généraux et flexibles pour pouvoir aborder des cas complexes et de plus en plus actuels:

→ Besoin d'un modèle unitaire, général et flexible sur la modélisation

4. Pour finir : des rapports complexes entre systèmes et modèles

QUESTIONS OUVERTES (1) Besoins épistémologiques et didactiques

- Quelles **praxéologies didactiques** (soutenues par quels **logos**) pour concevoir et gérer les processus de modélisation avec toutes ses complexités ? Faut-il un **logos commun** pour la profession d'enseignant ?
 - Quel « **logos mathématique** » pour éviter des processus de modélisation « muets » (aussi bien pour les élèves que pour les professeurs) ?
- *Les programmes scolaires de nombreux pays naturalisent ce logos mathématique et ne prennent en compte, au plus, que quelques éléments généraux du logos didactique*

4. Pour finir : des rapports complexes entre systèmes et modèles

QUESTIONS OUVERTES (et 2) Modélisation et questionnement du monde

- Doit-on considérer « la compétence modéliser » comme un but en soi ou bien comme un moyen pour la fin de « questionner le monde » ?
 - Faut-il des dispositifs didactiques pour enseigner (uniquement) la modélisation ou bien pour enseigner des processus d'enquête qui intègrent la modélisation ?
- *Il est important d'identifier le paradigme didactique que l'on assume comme dominant. On peut aussi bien enseigner la modélisation dans un processus de visite d'œuvres que de questionnement du monde.*
- *L'origine et le destin de la question qui engendre le processus de modélisation est un aspect clé à prendre en compte.*

Rencontres autour de la compétence « Modéliser » en mathématiques



Une formation des enseignants a la
modélisation : modèles, ostensifs et
nouveaux besoins épistémologiques

MERCI BEAUCOUP

bbarquero@ub.edu, marianna.bosch@ub.edu

Poitiers, 25 mai 2023

