La construction des chambres d'Ames

Explorations Geogebra
Jean-Charles Canonne
APMEP Poitiers
IREM Poitiers

1 Les chambres d'Ames

Les chambres d'Ames sont faites pour être observées depuis un point fixe (point d'observation que nous désignerons par la lettre E) et en vision monoculaire (Avec un seul oeil ou avec l'objectif d'une caméra).
La chambre d'Ames est une illusion d'optique construite par l'ophtalmologiste américain Adelbert Ames Jr. (en) en 1946.
Il existe deux types de chambre d'Ames:

- un modèle dit à double perspective constitué de deux pièces juxtaposées.Nous appélerons ce modèle chambre d'Ames de type 1.
- un modèle constiué d'une seule pièce que nous envisagerons comme la juxtaposition d'une infinité de pièces juxtaposées, et que appélerons chambre d'Ames de type 2.

2 Notations

2.1 Géométrie projective

Soit P^3 l'espace projectif à trois dimensions , c'est à dire dans l'espace à trois dimensions R^3 auquel ont été ajoutés les points à l'infini.
Les points de P^3 sont repérés grâce aux coordonnées homogènes.
Un quadruplet de nombres (x, y, z, w) définit un point de P^3.
Si $\eta \neq 0$, $(\eta x, \eta y, \eta z, \eta w)$ définit le même point.
Une transformation projective $\mathcal{Q}$ est une bijection de P^3 dans P^3 qui transforme les droites en droites.
Si $\mathcal{Q}$ est une transformation projective, il existe une matrice inversible $\mathcal{M}$, définie à un multiple non nul près, telle que pour tout point $p(x, y, z, w)$ l'image $p' = \mathcal{Q}(p) = (x', y', z', w')$ est obtenue

par:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ w' \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

On a:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & m_{44} \end{pmatrix}$$

La matrice de la transformation projective étant définie à un scalaire près, m_{44} est choisi égal à 1:

$$m_{44} = 1$$

2.2 Repère de R^3

Un coin inférieur de la pièce virtuelle $\mathcal{V}$, le point A, est choisi comme origine.

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Les côtés portant la largeur L, la profondeur P et la hauteur H de la pièce $\mathcal{V}$ portent les axes Ax, Ay et Az du repère.
Les 7 autres coins de la pièce $\mathcal{V}$ ont donc pour coordonnées:

- Pour le sol:

$$B = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} L \\ P \\ 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Pour le plafond:

$$AH = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ H \end{pmatrix} \quad BH = \begin{pmatrix} L \\ 0 \\ H \end{pmatrix} \quad CH = \begin{pmatrix} L \\ P \\ H \end{pmatrix} \quad DH = \begin{pmatrix} 0 \\ P \\ H \end{pmatrix}$$

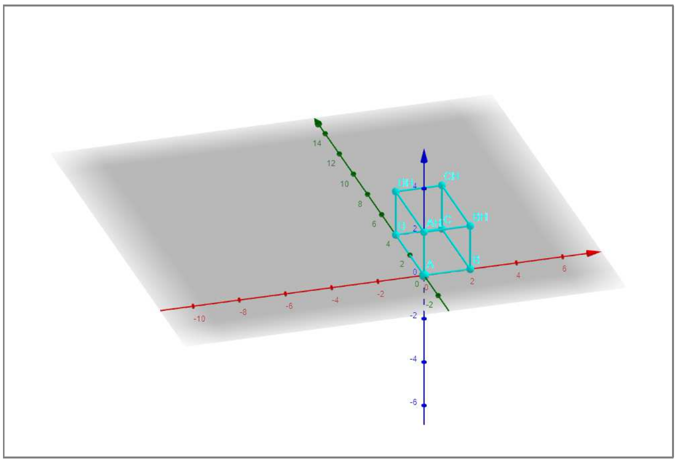

Figure 1: *La chambre virtuelle*

A ces points correspondent les points b, c, d, ah, bh, ch, dh de R^4.

2.3 Présentation de la démarche

Quand l'oeil est placé au point d'observation E, la pièce réelle $\mathcal{R}$ (c'est à dire effectivement construite), est interprétée par le cerveau comme une pièce ordinaire (parallépipédique) que appelée ici pièce virtuelle ou pièce $\mathcal{V}$.
Cette pièce $\mathcal{V}$ est image de la pièce $\mathcal{R}$ par une transformation projective $\mathcal{P}$.
La démarche ici est inverse: la pièce telle qu'elle est perçue $\mathcal{V}$ est connue et la construction de la pièce réelle $\mathcal{R}$ en est déduite.
Pour ce faire une transformation projective $\mathcal{Q}$ qui transforme $\mathcal{V}$ en $\mathcal{R}$ est définie

3 Chambre d'Ames type 1

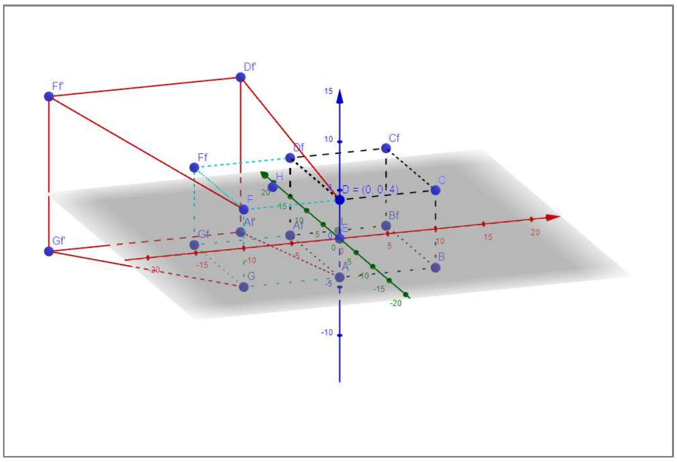

Figure 2: *La chambre d'Ames double*

3.1 Point d'observation

La construction de la chambre d' Ames nécessite le choix du point d'observation E.
Pour la construction du type 1, le point E est choisi avec un abscisse égale à la largeur L et une coordonnée y nulle.

$$E = \begin{pmatrix} e_1 = L \\ e_2 = 0 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} e_1 = L \\ e_2 = 0 \\ e_3 \\ e_4 = 1 \end{pmatrix}$$

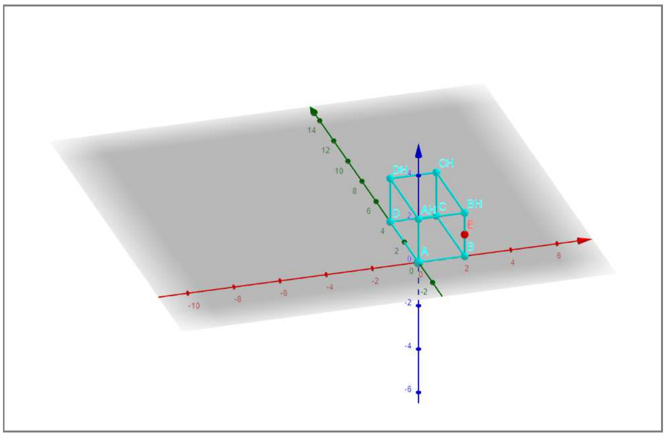

Figure 3: *Le point E*

3.2 Image du point à l'infini i

Le point à l'infini:

$$i = \begin{pmatrix} i_1 = 1 \\ i_2 = 0 \\ i_3 = 0 \\ i_4 = 0 \end{pmatrix}$$

correspond à la direction de l'axe des x).
Ce point est **choisi** invariant par la transformation projective $\mathcal{Q}$.
Il existe donc un réel X tel que la première colonne de la matrice $\mathcal{M}$ s'écrive:

$$\begin{pmatrix} X \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.3 Choix de l'image du point A

Le point A est **choisi** invariant par la transformation projective $\mathcal{Q}$.
La quatrième colonne de la matrice $\mathcal{M}$ peut donc s'écrire (puisqu'on a fait le choix $m_{44} = 1$)

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3.4 Choix de l'image DP du point D

Le point D et son image DP doivent être vus de façon identique depuis le point d'observation E.
Les points E, D et DP doivent être alignés.
Le paramètre alpha permet de choisir le point DP en respectant cette contrainte:

$$dp = e + \alpha.(d - e)$$

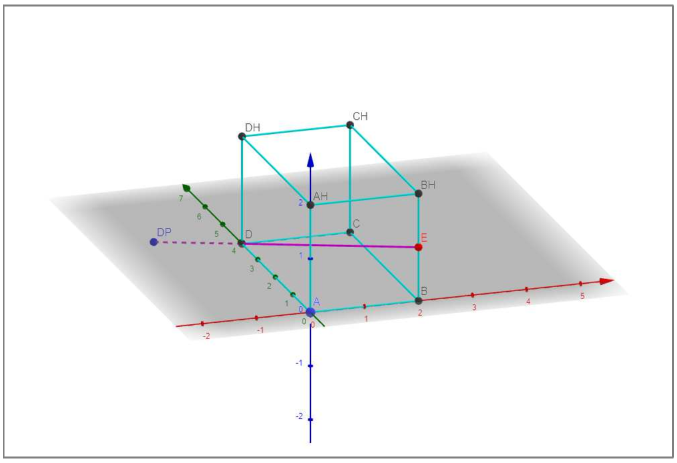

Figure 4: *Le choix du point DP*

La résolution du système d'équations correspondant donne:

$$DP = \begin{pmatrix} (1-\alpha).L \\ \alpha.P \\ (1-\alpha).e_3 \end{pmatrix}$$

3.5 Construction de l'image CP du point C

Le point C et son image CP doivent être vus de façon identique depuis le point d'observation E.
Les points E, C et CP doivent être alignés: le point CP est sur la droite d_2 passant par E et C.
Les points C et D sont tels que $\overrightarrow{DC}$ et l'axe des x ont même direction.
Les points CP et DP vérifient donc la même propriété: CP est sur la parallèle d_1 à l'axe des x passant par DP. Le point CP est donc l'intersection des droites d_1 et d_2.

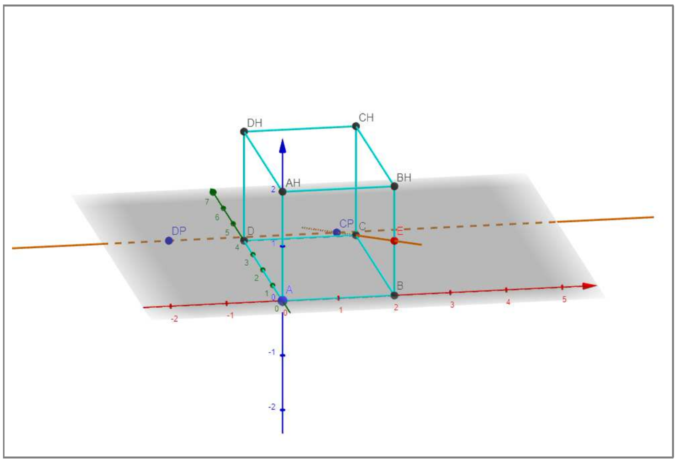

Figure 5: *Construction du point CP*

Le point cp est donc obtenu comme intersection des droites ec et idp.
D'après le théorème de Thales, le point CP vèrifie aussi:

$$cp = e + \alpha.(c - e)$$

La résolution du système d'équations correspondant donne:

$$CP = \begin{pmatrix} L \\ \alpha.P \\ (1-\alpha).e_3 \end{pmatrix}$$

3.6 Construction de l'image BP du point B

Le point B et son image BP doivent être vus de façon identique depuis le point d'observation E.
Les points E, B et BP doivent être alignés.
Les points A et B sont tels que $\overrightarrow{AB}$ et l'axe des x ont même direction.
Les points $AP = A$ et BP vérifient donc la même propriété: ABP est sur l'axe des x passant.
Le point BP est donc l'intersection de la droite EB et de l'axe des x: c'est donc le point B:

$$BP = B$$

3.7 Construction du point de fuite w image du point à l'infini y

Le point à l'infini y est défini par:

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il correspond au point à l'infini dans la direction donnée par l'axe Ay.
Les points y, a, d sont alignés: les points W,$AP = A$ et DP doivent donc être alignés.
Les points y, b, c sont alignés: les points W,$BP = B$ et CP doivent donc être alignés.
Le point W est donc l'intersection des droites ADP et BCP.

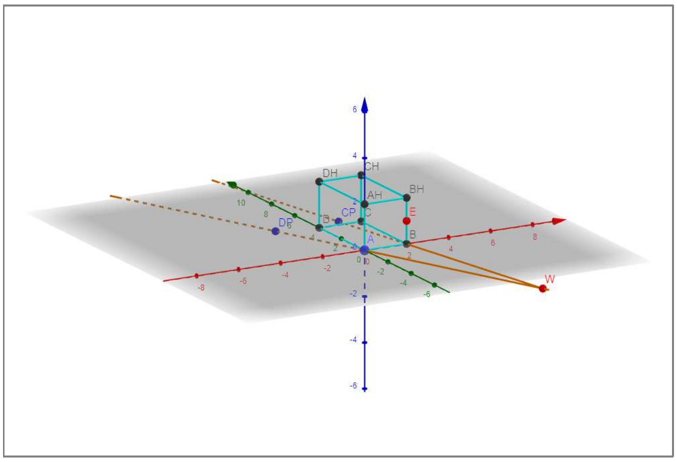

Figure 6: *Le point de fuite W*

La résolution du système d'équations correspondant nous donne:

$$W = \begin{pmatrix} L \\ \frac{\alpha}{1-\alpha}.P \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Le point à distance finie w est l'image par la transformation projective $\mathcal{Q}$ du point à l'infini y. Il existe donc un réel Y tel que la deuxième colonne de la matrice $\mathcal{M}$ soit égale à:

$$\begin{pmatrix} Y.L) \\ Y.(\frac{\alpha}{1-\alpha}.P) \\ Y.e_3 \\ Y \end{pmatrix}$$

3.8 Choix de l'image zp du point à l'infini z

Soit le point à l'infini:

$$z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce point correspond à la verticale.
Le **choix** est fait de conserver de construire une chambre d'Ames ayant des murs verticaux: Le

point z est donc choisi invariant par $\mathcal{Q}$.
Il existe donc un réel Z tel que la troisième colonne de la matrice $\mathcal{M}$ soit égale à:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.9 Choix de l'image AHP du point AH

Le point ah est **choisi** invariant par la transformation projective $\mathcal{Q}$.

$$AHP = AH$$

Ce choix se traduit dans la matrice $\mathcal{M}$ par:

$$Z = 1$$

3.10 Construction du point BHP image du point BH

Le point BH et son image BHP doivent être vus de façon identique depuis le point d'observation E.
Les points E, BH et BHP doivent être alignés.
Les points AH et BH sont tels que $\overrightarrow{AH.BH}$ et l'axe des x ont même direction.
Les points $AHP = AH$ et BHP vérifient donc la même propriété: BHP est sur la parallèle d à l'axe des x passant par AH. Le point BHP est donc l'intersection de la droite $E.BH$ et de d: c'est donc le point BH:

$$BHP = BH$$

$$BHP = \begin{pmatrix} L \\ H \\ 0 \end{pmatrix}$$

3.11 Construction du point DHP image du point DH

Le point DH et son image DHP doivent être vus de façon identique depuis le point d'observation E.
Les points E, DH et DHP doivent être alignés.
Les points y, ah, dh sont alignés: les points W,$AHP = AH$ et DHP doivent donc être alignés.
Le point DHP est donc l'intersection des droites $E.DH$ et $W.AH$.

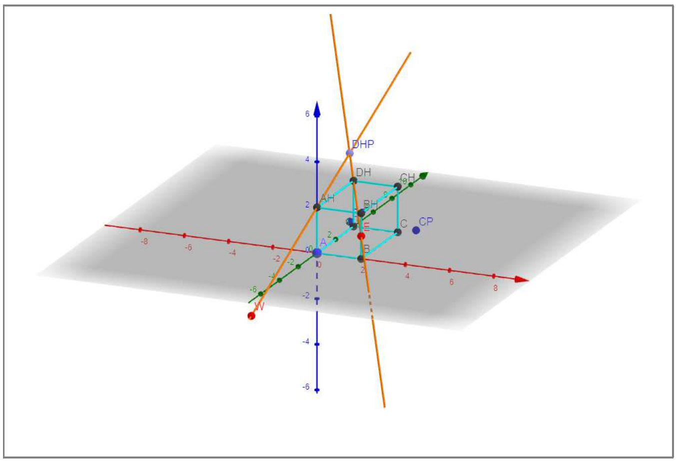

Figure 7: *La construction du point DHP*

D'après le théorème de Thales, le point DHP vèrifie aussi:

$$dhp = e + \alpha.(dh - e)$$

Les coordonnées de DHP sont donc:

$$DHP = \begin{pmatrix} (1-\alpha).L \\ \alpha.P \\ (1-\alpha).e_3 + \alpha.H \end{pmatrix}$$

3.12 Construction du point CHP image du point CH

Le point CH et son image CHP doivent être vus de façon identique depuis le point d'observation E.
Les points E, CH et CHP doivent être alignés.
Les points y, bh, ch sont alignés: les points W,$BHP = BH$ et CHP doivent donc être alignés.
Le point CHP est donc l'intersection des droites $E.CH$ et $W.BH$.

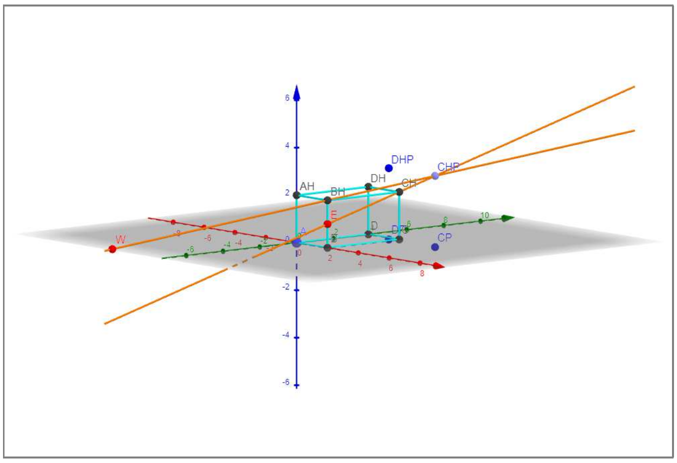

Figure 8: *La construction du point CHP*

D'après le théorème de Thales, le point CHP vèrifie aussi:

$$chp = e + \alpha.(ch - e)$$

Les coordonnées de CHP sont donc:

$$CHP = \begin{pmatrix} L \\ \alpha.P \\ (1-\alpha).e_3 + \alpha.H \end{pmatrix}$$

3.13 Calcul de la matrice $\mathcal{M}$

Il reste à déterminer les valeurs de X dans la première colonne et Y dans la deuxième colonne. Pour cela nous écrivons que:

$$\mathcal{M} * c = cp$$

La résolution de ce système nous donne:

$$X = 1, Y = \frac{1-\alpha}{\alpha.P}$$

Et nous avons donc:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1-\alpha}{\alpha.P}.L & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\alpha}{\alpha.P}.e_3 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1-\alpha}{\alpha.P} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.14 Le patron de la chambre d'Ames de type 1

Il est judicieux pour construire une chambre d'Ames de construire les projections orthogonales AS,BS et CS sur le plan $z = DP[3]$ des points AP, BP et CP:

$$AS = [AP[1], AP[2], DP[3]]$$

$$BS = [BP[1], BP[2], BP[3]]$$
$$CS = [CP[1], CP[2], DP[3]]$$

puis de monter sur cette base les différentes parois de la chambre, le sol de la chambre étant construit dans un deuxième temps.
Cette remarque vaut aussi pour la construction du patron de la chambre d'Ames de type 2, pour laquelle un programme Geogebra est fourni.

4 Chambre d'Ames de type 2

4.1 Point d'observation

La construction de la chambre d' Ames nécessite le choix du point d'observation E:

$$E = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{pmatrix}$$

avec $e_4 = 1$.

4.2 Choix d'un point de fuite I

Le paramètre réel v permet de construire le point I:

$$I = \begin{pmatrix} i_1 = e_1 + v \\ i_2 = e_2 \\ i_3 = e_3 \end{pmatrix} \quad i = \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 = 1 \end{pmatrix}$$

Le point à distance fini i est **choisi** pour image du point à l'infini:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(la direction de l'axe des x) par la transformation projective $\mathcal{Q}$.

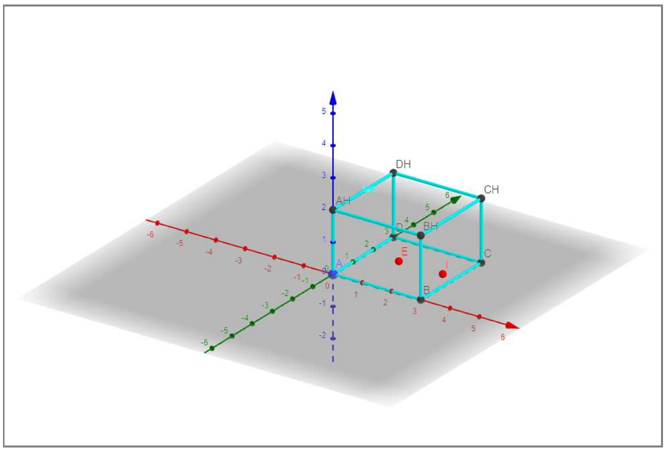

Figure 9: *Les points E et I*

Il existe donc un réel X tel que la première colonne de la matrice $\mathcal{M}$ s'écrive:

$$\begin{pmatrix} X.i_1 \\ X.i_2 \\ X.i_3 \\ X \end{pmatrix}$$

4.3 Choix de l'image du point A

Le point A est **choisi** invariant par la transformation projective $\mathcal{Q}$.
La quatrième colonne de la matrice $\mathcal{M}$ peut donc s'écrire:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

4.4 Choix de l'image DP du point D

Le point D et son image DP doivent être vus de façon identique depuis le point d'observation E.
Les points E, D et DP doivent être alignés.
Le paramètre alpha permet de choisir le point DP en respectant cette contrainte:

$$dp = e + \alpha.(d - e)$$

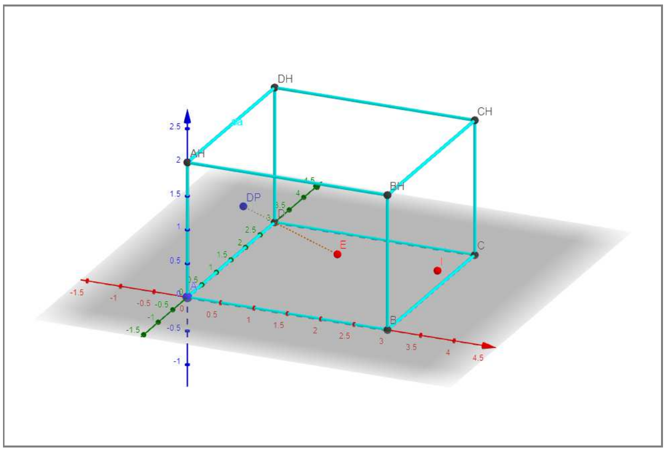

Figure 10: *Le choix du point DP*

4.5 Construction de l'image CP du point C

Le point C et son image CP doivent être vus de façon identique depuis le point d'observation E.
Les points E, C et CP doivent être alignés.
Les points x, d, c sont alignés: les points I,DP et CP doivent donc être alignés.

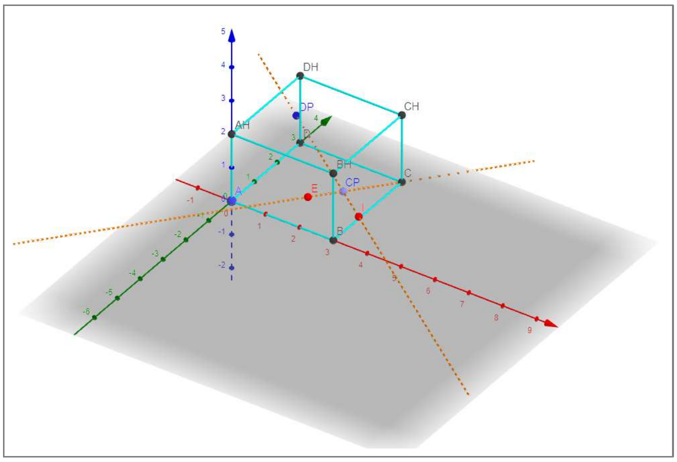

Figure 11: *Construction du point CP*

Le point cp est donc obtenu comme intersection des droites ec et idp.
La résolution du système d'équations correspondant (avec par exemple un logiciel de calcul formel) nous donne:

$$CP = \begin{pmatrix} \frac{e_1.\alpha.L+e_1.v+v.\alpha.L-v.\alpha.e_1}{\alpha.L+v} \\ e_2 + \frac{v.\alpha.(P-e_2)}{\alpha.L+v} \\ e_3 - \frac{v.\alpha.e_3}{\alpha.L+v} \end{pmatrix}$$

4.6 Construction de l'image BP du point B

Le point B et son image BP doivent être vus de façon identique depuis le point d'observation E.
Les points E, B et BP doivent être alignés.
Les points x, a, b sont alignés: les points I,$AP = A$ et BP doivent donc être alignés.

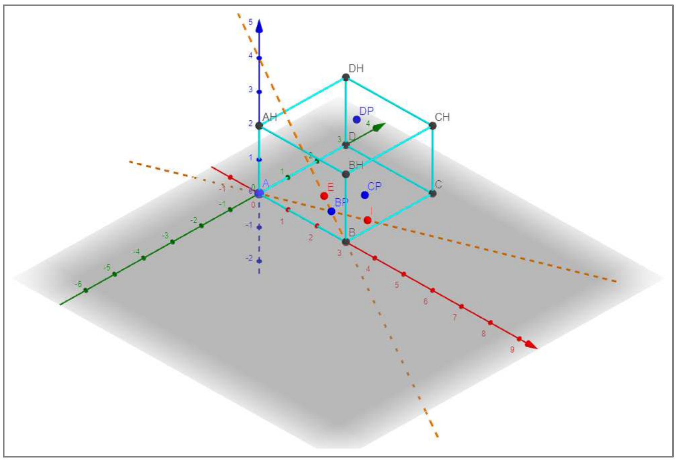

Figure 12: *Construction du point BP*

Le point BP est donc obtenu comme intersection des droites EB et IA. La résolution du système d'équations correspondant nous donne:

$$BP = \begin{pmatrix} e_1 + \frac{v.(L-e_1)}{L+v} \\ e_2 - \frac{v.e_2}{L+v} \\ e_2 - \frac{v.e_2}{L+v} \end{pmatrix}$$

4.7 Construction du point de fuite w image du point à l'infini y

Le point à l'infini y est défini par:

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il correspond au point à l'infini dans la direction donnée par l'axe Ay.
Les points y, a, d sont alignés: les points W,$AP = A$ et DP doivent donc être alignés. Les points y, b, c sont alignés: les points W,BP et CP doivent donc être alignés. Le point W est donc l'intersection des droites $A.DP$ et $BP.CP$.

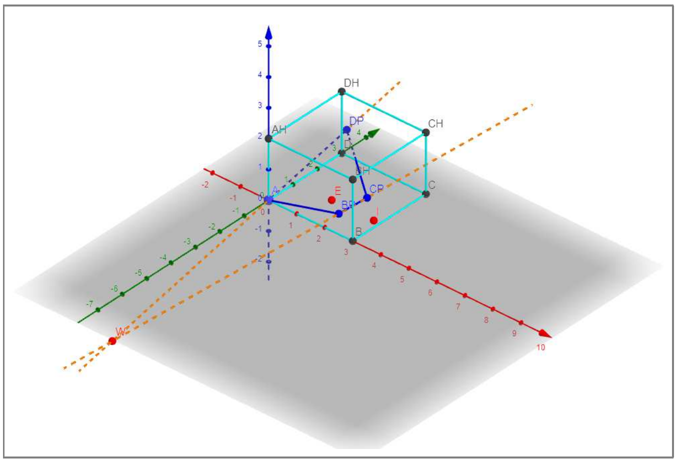

Figure 13: *Le point de fuite W*

La résolution du système d'équations correspondant nous donne:

$$W = \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 + \frac{\alpha.P}{1-\alpha} \\ e_3 \end{pmatrix}$$

Le point à distance finie w est l'image par la transformation projective $\mathcal{Q}$ du point à l'infini y. Il existe donc un réel Y tel que la deuxième colonne de la matrice $\mathcal{M}$ soit égale à:

$$\begin{pmatrix} Y.e_1 \\ Y.(e_2 + \frac{\alpha.P}{1-\alpha}) \\ Y.e_3 \\ Y \end{pmatrix}$$

4.8 Choix de l'image zp du point à l'infini z

Soit le point à l'infini:

$$z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ce point correspond à la verticale.
Le **choix** est fait de conserver de construire une chambre d'Ames ayant des murs verticaux: Le point z est donc choisi invariant par $\mathcal{Q}$.
Il existe donc un réel Z tel que la troisième colonne de la matrice $\mathcal{M}$ soit égale à:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Z \\ 0 \end{pmatrix}$$

4.9 Choix de l'image AHP du point AH

Le point ah est **choisi** invariant par la transformation projective $\mathcal{Q}$.

$$AHP = AH$$

Ce choix se traduit dans la matrice $\mathcal{M}$ par:

$$Z = 1$$

4.10 Construction du point BHP image du point BH

Le point BH et son image BHP doivent être vus de façon identique depuis le point d'observation E.
Les points E, BH et BHP doivent être alignés.
Les points x, ah, bh sont alignés: les points I,$AHP = AH$ et BHP doivent donc être alignés.
Le point BHP est donc obtenu comme intersection des droites EBH et IAH.

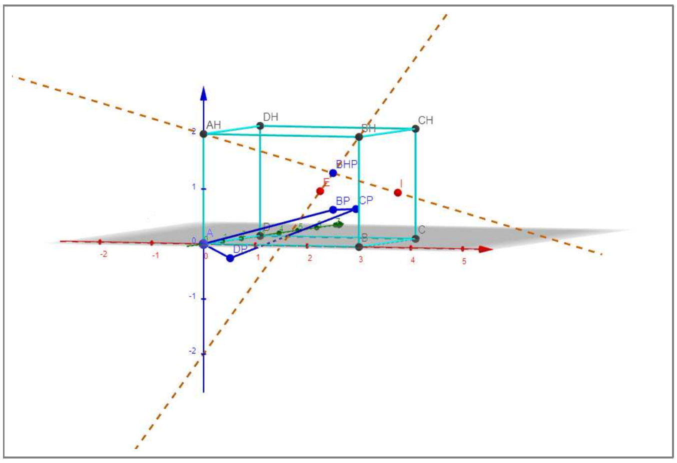

Figure 14: *La construction du point BHP*

La résolution du système d'équations correspondant nous donne:

$$BHP = \begin{pmatrix} \frac{L.(e_1+v}{L+v} \\ \frac{e_2.L}{L+v} \\ \frac{e_3.L+v.H}{L+v} \end{pmatrix}$$

4.11 Construction du point CHP image du point CH

Le point CH et son image CHP doivent être vus de façon identique depuis le point d'observation E.
Les points E, CH et CHP doivent être alignés.

Les points y, bh, ch sont alignés: les points W,BHP et CHP doivent donc être alignés.
Le point CHP est donc l'intersection des droites ECH et $WBHP$.

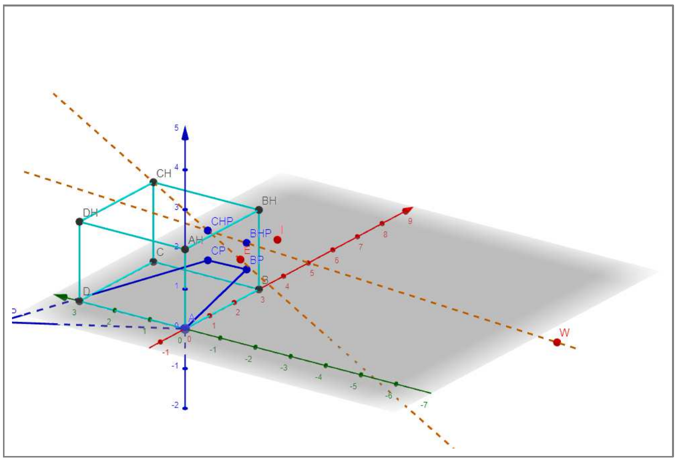

Figure 15: *La construction du point CHP*

La résolution du système d'équations correspondant nous donne:

$$CHP = \begin{pmatrix} \frac{e_1.\alpha.L+e_1.v+v.\alpha.L-v\alpha.e_1}{\alpha.L+v} \\ \frac{e_2.\alpha.L+e_2.v+v.\alpha.P-v\alpha.e_2}{\alpha.L+v} \\ \frac{e_3.\alpha.L+e_3.v+v.\alpha.H-v\alpha.e_3}{\alpha.L+v} \end{pmatrix}$$

4.12 Construction du point DHP image du point DH

Le point DH et son image DHP doivent être vus de façon identique depuis le point d'observation E.
Les points E, DH et DHP doivent être alignés.
Les points y, ah, dh sont alignés: les points W,$AHP = AH$ et DHP doivent donc être alignés.
Le point DHP est donc l'intersection des droites EDH et WAH.

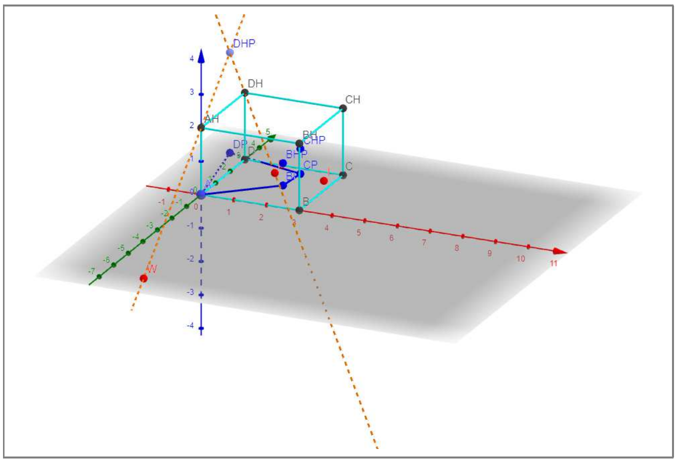

Figure 16: *La construction du point DHP*

La résolution du système d'équations correspondant nous donne:

$$DHP = \begin{pmatrix} e_1 - \alpha.e_1 \\ e_2 - \alpha.e_2 + \alpha.P \\ e_3 - \alpha.e_3 + \alpha.H \end{pmatrix}$$

4.13 Calcul de la matrice $\mathcal{M}$

Il reste à déterminer les valeurs de X dans la première colonne et Y dans la deuxième colonne. Pour cela nous écrivons que:

$$\mathcal{M} * c = cp$$

La résolution de ce système nous donne:

$$X = \frac{1}{v}, Y = \frac{1-\alpha}{\alpha.P}$$

Et nous avons donc:

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{v}.e_1 & \frac{1-\alpha}{\alpha.P}.e_1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{v}.e_2 & 1 + \frac{1-\alpha}{\alpha.P}.e_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{v}.e_3 & \frac{1-\alpha}{\alpha.P}.e_3 & 1 & 0 \\ \frac{1}{v} & \frac{1-\alpha}{\alpha.P} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Cette matrice permet de passer d'un point de la chambre virtuelle au point tel qu'il faut le placer dans la chambre d'Ames.

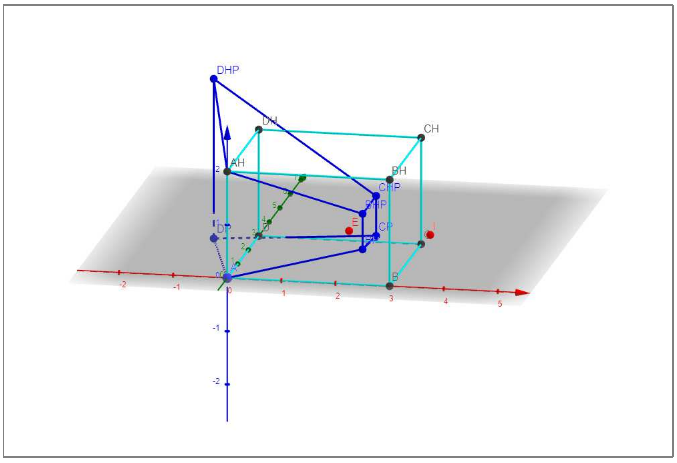

Figure 17: La chambre d'Ames de type 2

4.14 Le patron de la chambre d'Ames de type 2

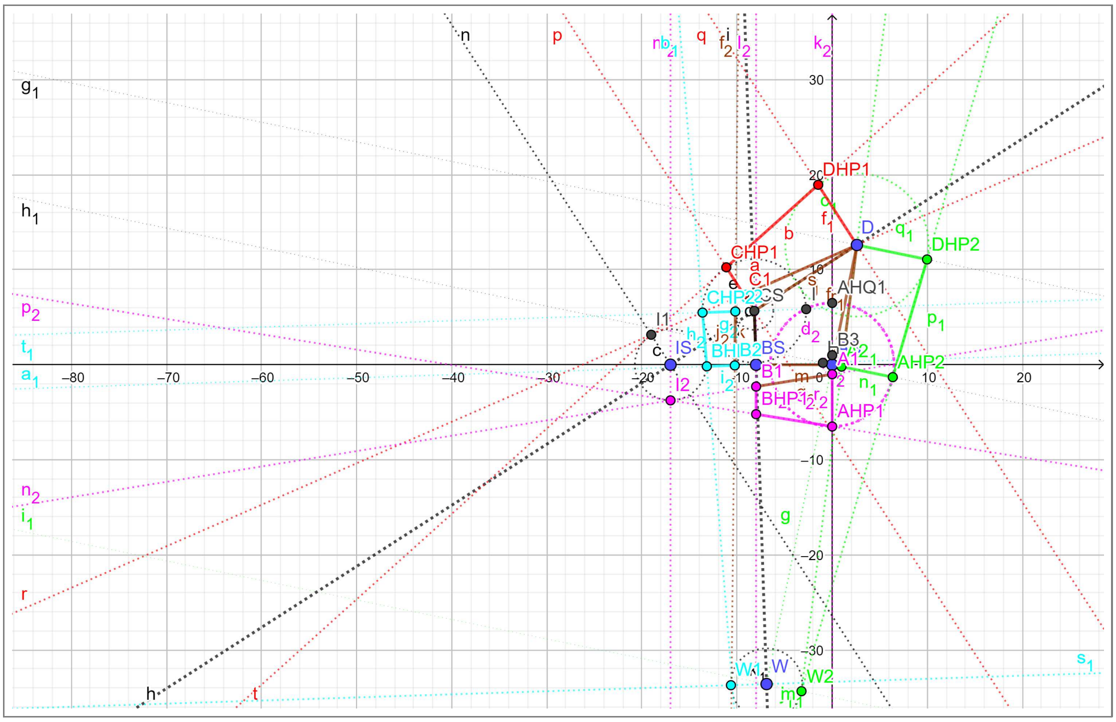

Figure 18: Le patron de la chambre

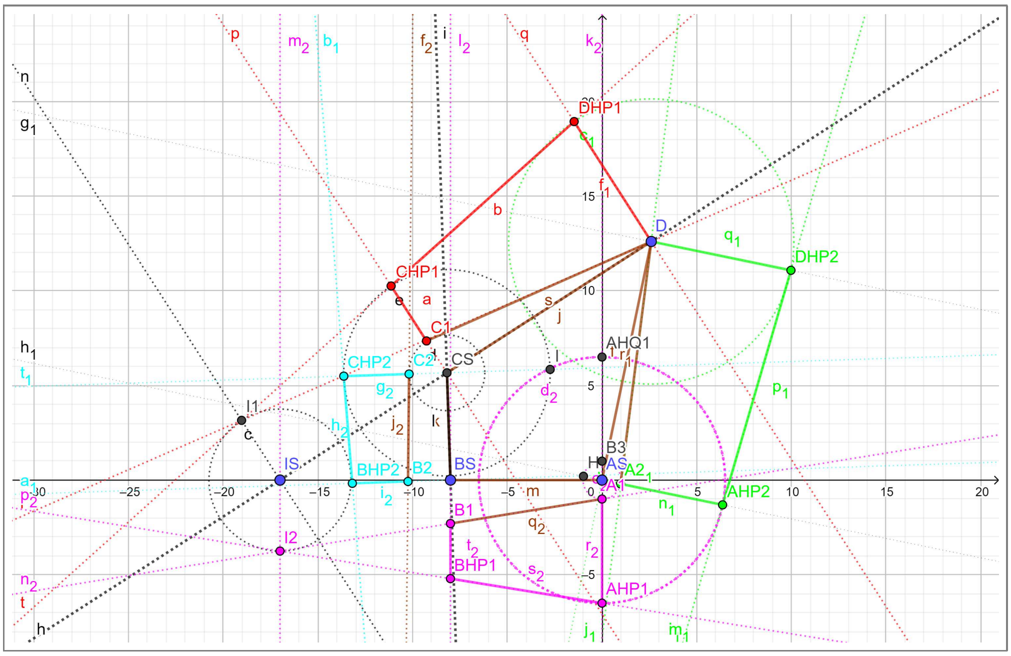

Figure 19: *Zoom sur le patron*